EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Geschiedenis in de wiskundeles

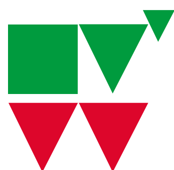
Hoe oneigenlijk is 'oneigenlijk'?

Stokjesdriehoek had aandacht van Lewis Caroll

Recreatie: kortste weg van A naar B

Even voorstellen: nieuwe bestuursleden

NR.4



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | FEBRUARI 2016

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 4

IN DIT NUMMER

Coverfoto: Museu de les Ciències Príncipe Felipe, Valencia.
Fotograaf: Gerard van Heijningen

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Vlak voordat we allemaal van een welverdiende vakantie gingen genieten, is op 15 december het Deltaplan voor de Nederlandse Wiskunde opgeleverd aan de opdrachtgevers, daartoe uitgenodigd door het ministerie van onderwijs: Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO). Een Deltaplan klinkt alsof er rampzalige overstromingen voorkomen moeten worden. Die hebben dan betrekking op het mogelijk onderkennen van de steeds grotere rol die wiskunde, in de meest brede zin van het woord, speelt in de maatschappij van de nabije toekomst. Het PWN heeft daartoe vorig jaar een visiedocument opgesteld, het Deltaplan is de concretisering van deze visie. Het gaat hierbij zeker niet alleen om de academische wereld en het wiskundig onderzoek. Op de site van het PWN staat te lezen: de wiskunde kan alleen gezond blijven als deze zich in de kern kan blijven ontwikkelen, want die kern is de uiteindelijke bron van vernieuwing. Het onderwijs in de wiskunde is aan een kritische heroverweging toe, ook het wiskundeonderwijs aan studenten in andere vakken. De rol van wiskunde in de praktijk wordt in deze Euclides onder andere beschreven door John Poppelaars in zijn artikel Wiskunde op het werk en door Arthur Bakker in zijn editie van het Fizier, Beroepsgerichte vakdidactiek. Er is werk aan de winkel: een compleet Deltaplan uitvoeren. En al die mensen die deze plannen gaan realiseren hebben ooit hun eerste wiskundeles gehad, misschien wel van u...

Tom Goris

WISKUNDE OP HET WERK

John Poppelaars

Op 9 oktober 2015 was er op het Freudenthal Instituut een afscheidssymposium voor Henk van der Kooij. De hoofdlezing werd gegeven door John Poppelaars. John is expert op het gebied van *operations research* en is onder andere door de Leergang Vernieuwing Wiskunde in contact gekomen met het onderwijsveld. Hoe kijkt iemand vanuit de praktijk tegen het wiskundeonderwijs aan?

Ik schrijf dit stuk kort nadat de Tweede Kamer heeft besloten de invoering van de rekentoets voor het vmbo, havo en mbo uit te stellen omdat, aldus de politici, het rekenonderwijs niet op orde is.[1] Ik ben het eens met het besluit, echter niet met de argumentatie. Het ontwikkelen van rekenvaardigheden is een noodzakelijke maar geen voldoende voorwaarde in de voorbereiding van onze jeugd op een succesvolle deelname aan onze maatschappij. Het wiskundeonderwijs moet anders worden ingericht, dit omdat de rol van wiskunde in ons dagelijks leven in de afgelopen decennia is veranderd en zal blijven veranderen als gevolg van technologische vernieuwingen. We gebruiken steeds meer wiskundige modellen om beslissingen te nemen of geautomatiseerd beslissingen voor ons te laten nemen. Het is zelfs zo dat sommige beslissingen niet eens meer zonder wiskunde kunnen worden genomen. Deze trend zorgt ervoor dat niet de rekenvaardigheid maar een goed ontwikkelde wiskundige denkvaardigheid de kans op succes voor onze jeugd bepaalt in onze steeds meer door technologie en data gedreven maatschappij. Wiskunde heeft door de eeuwen heen veel invloed gehad op de manier waarop we werken of beslissingen nemen. De introductie van het getal nul en de Arabische cijfernotatie door Fibonacci ergens aan het begin van de dertiende eeuw, is daar een voorbeeld van. Door de introductie van de Arabische cijfernotatie konden berekeningen veel sneller worden uitgevoerd en was het gebruik van een abacus niet meer noodzakelijk. Dit had een enorme positieve invloed op de ontwikkeling van de handel en stimuleerde de economische groei. Een meer recent voorbeeld van de invloed van wiskunde op de maatschappij is de door George Dantzig ontwikkelde simplexmethode.[2] Zijn werk, en van tijdgenoten als Kantorovitsj, Speelman en Von Neumann, heeft de basis gelegd voor mijn vakgebied, de *operations research*. De simplexmethode is een oplosmethode voor lineaire programmeringsvraagstukken, optimaliseringsproblemen waarin de doelfunctie en de randvoorwaarden lineair zijn. In de woorden van Dantzig is de simplexmethode een revolutionaire ontwikkeling die de mensheid de mogelijkheid heeft gegeven om grote, complexe, praktische optimalisatievraagstukken wiskundig te formuleren en daarvoor de beste oplossing te vinden. Vraagstukken die eerst onmogelijk konden worden opgelost werden oplosbaar.



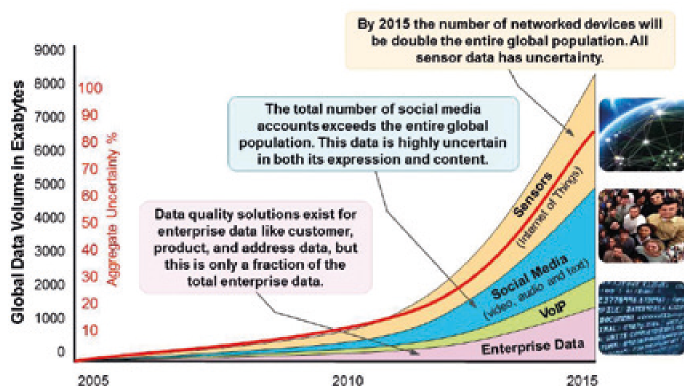
figuur 1
George Dantzig

De invloed van het werk van George Dantzig is nog steeds merkbaar in ons dagelijks leven. Het heeft het optimaliseren van ticketprijzen mogelijk gemaakt wat de luchtvaartindustrie compleet heeft veranderd en ons de mogelijkheid gegeven tegen lage prijzen naar onze vakantiebestemming vliegen. Het bepalen van de best passende dienstregeling voor een van de meest drukbezette spoornetten ter wereld, dat van de Nederlandse Spoorwegen, zou niet mogelijk zijn zonder het werk van Dantzig. In mijn werk als wiskundig consultant heb ik de methode vele malen gebruikt om lastige vraagstukken van klanten op te lossen, bijvoorbeeld voor TNT Express. Door de financiële crisis van 2008 stond TNT Express voor de keuze haar luchtvrachtnetwerk drastisch te reduceren, met als gevolg dat ze veel klanten zouden verliezen en nog dieper in de problemen zouden komen door het omzetverlies.[3] In een periode van slechts enkele weken konden mijn team en ik met een lineaire programmeringsaanpak een kostenefficiënt alternatief bepalen voor het luchtvrachtnetwerk van TNT Express dat voor een groot deel van de klanten garandeerde dat de vracht op tijd kon blijven worden afgeleverd. Het nieuwe, geoptimaliseerde netwerk leverde een kostenbesparing op van 20 miljoen euro waardoor TNT Express de financiële crisis overleefde. Het is verleidelijk om te denken dat het kunnen herkennen en oplossen van een lineair programmeringsprobleem de belangrijkste factor is om succesvol met wiskunde praktijkproblemen op te lossen. Het is echter slechts een klein onderdeel daarvan. Voordat een

> 'HET ONTWIKKELEN VAN KRITISCH DENKVERMOGEN OM FEIT EN FICTIE OVER BIG DATA TE BLIJVEN SCHEIDEN.'

lineair programmeringsprobleem kan worden opgelost moet het praktische vraagstuk in een wiskundig model worden vertaald. Een belangrijke stap die daarin moet worden gezet is het vaststellen van de scope van het vraagstuk, het *framen*. Daarbij moeten afwegingen met betrekking tot de relevante beslissingsvariabelen, beperkingen en te hanteren doelstelling worden gemaakt. Dit vraagt om een scherp denkvermogen en goede communicatieve vaardigheden. Als je immers niet doorvraagt en daarmee onvoldoende begrip van de vraag krijgt is de kans groot dat je de perfecte oplossing voor de verkeerde vraag gaat zoeken. Als deze eerste stap eenmaal gezet is, dan kan in woorden een model worden omschreven. De volgende stap is om dit model in woorden om te zetten in een wiskundige formulering. Er zijn veel manieren om dit te doen en het vraagt dan ook wiskundig inzicht, kennis van beschikbare oplosmethoden en creativiteit om tot een in de praktijk handige formulering te komen die goed op te lossen is. Vaak zijn modellen zo groot dat er met meerdere mensen aan gewerkt wordt, dat betekent dat een team uit goed opgeleide creatieve wiskundigen moet bestaan die goed kunnen samenwerken. De praktijk is vaak weerbarstig met als gevolg dat standaard oplosmethoden niet werken voor het op te lossen vraagstuk. In die situatie wordt opnieuw een beroep gedaan op de creativiteit en de inventiviteit van de wiskundige om een oplosmethode te vinden die wel werkt. Opvallend is dat in de discussie over de kwaliteit van het wiskundeonderwijs de bovengenoemde vaardigheden niet voorkomen.

De hype van dit moment is *big data*, een trend die ook voor wiskundigen nieuwe uitdagingen oplevert. In apparaten en machines zitten steeds vaker sensoren die met het internet verbonden zijn en continu meetwaarden doorgeven. Ook zijn we met zijn allen bijna continu online, kopen artikelen bij webwinkels, streamen video's en muziek, lezen nieuws en delen nieuwtjes, foto's en video's op Instagram of Facebook. Geschat wordt dat er op dit moment op wereldschaal acht Zetabytes aan data is, of wel een acht met 21 nullen. Een astronomische omvang, die ook nog eens exponentieel blijft groeien. Deze *big data* leidt tot verbeelding sprekende nieuwe toepassingen zoals het accuraat voorspellen van consumentengedrag. Zo is supermarktketen Target in staat om op basis van de samenstelling van aankopen van haar klanten een nauwkeurige voorspelling te doen of de klant zwanger is. Op basis van deze voorspelling past Target haar persoonlijke aanbiedingen aan met bijvoorbeeld aanbiedingen voor zwangerschapskleding. En met succes, de nauwkeurigheid van Target's voorspellingen haalde zelfs de krant. [4] De mogelijkheden van *big data* gaan zelfs verder. Volgens voormalig *Wired* redacteur Chris Anderson zorgt *big data* er voor dat er geen formele modellen of theorie meer nodig zijn, uit de data komt de juiste samenhang naar boven als deze maar groot genoeg in omvang is.[5] Mooi voorbeeld hiervan is Google *Flu Trends*. Zonder enige kennis van hoe een griepvirus ontstaat en zich verspreidt was Google in staat uit de zoektermen die in hun zoekmachine gebruikt werden de ontwikkeling van het aantal griepgevallen te voorspellen. Dat deden ze sneller en goedkoper dan de RIVM's en CDC's van deze wereld. Met behulp van deze voorspellingen kan adequater worden gehandeld, bijvoorbeeld door sneller de productie van vaccins op te starten en eerder preventief te kunnen vaccineren.



figuur 2 Data expansie

Big data is om tweeërlei redenen een uitdaging voor wiskundigen. Allereerst vraagt de omvang, (on)gestructureerdheid en snelheid van de data om nieuwe wiskundige methoden voor analyse van en berekeningen met de data. Innovatie dus. Tweede en voor de praktijk misschien wel belangrijkere uitdaging is het ontwikkelen van kritisch denkvermogen om feit en fictie over *big data* te blijven scheiden. Over beide bovenstaande 'succesverhalen' van *big data* toepassingen valt namelijk wel wat op te merken. Target kon de link tussen zwangerschap en aankopen leggen omdat van klantkaarthouders bij wordt gehouden of ze een babykadodoos ophalen. Daarmee was het mogelijk in de aankopen voorafgaand aan het ophalen van de babykadodoos op zoek te gaan naar wijzigingen in aankooppatronen. Met deze kennis voorspelt Target of de klant in kwestie zwanger was. Maar zoals met alle voorspellingen is zo'n voorspelling nooit 100% nauwkeurig. Het verhaal van Target wekt de suggestie dat de analyse van *big data* zeer nauwkeurige voorspellingen oplevert, maar wat we niet weten is hoeveel vrouwen een aanbieding van Target hebben ontvangen terwijl ze niet zwanger zijn, zogenaamde *false positives*. Het succes van Google Flu trends suggereert dat correlatie tussen zoektermen en de incidentie van griep voldoende is om de volgende epidemie te voorspellen. Echter in 2012 overschatte Google de omvang van de griepgolf fors, omdat mensen door de verhalen in de pers meer dan anders met griep gerelateerde termen Google gebruikte. Correlatie alleen is toch niet voldoende.

Heraclitus zei het eeuwen geleden al dat de enige constante, verandering is. Rekenvaardigheden waren in het pre-computertijdperk belangrijk. Nu is het kunnen

werken met algoritmen, ze ontwerpen, begrijpen en vaststellen wat ze wel en niet kunnen veel belangrijker geworden. De vasthoudendheid van de politiek om rekenvaardigheid centraal te stellen in het wiskundeonderwijs begrijp ik daarom totaal niet. Mijn ervaring met het in praktijk brengen van wiskunde is dat het vraagt om het vermogen om buiten de kaders te kunnen denken en om nieuwe oplosmethoden te vinden of bestaande aan te passen. Niet rekenvaardigheid maar wiskundige denkvaardigheid dus! Daarnaast is het kunnen samenwerken met anderen heel belangrijk, net zoals het kunnen communiceren over wiskunde en het snel kunnen aanleren van nieuwe wiskundige vaardigheden. Met een focus op het aanleren van deze vaardigheden bereiden we onze jeugd in mijn optiek het beste voor op hun toekomst. Een 10 voor de rekentoets gaat daar niet veel (meer) aan bijdragen.

Noten

[1] Ruime Kamermeerderheid wil geen verplichte rekentoets, ook PvdA is tegen. *NRC*, 6 oktober 2015. *www.nrc.nl/nieuws/2015/10/06/ruime-kamermeerderheid-wil-geen-verplichte-rekentoets-ook-pvda-is-tegen*

[2] Freund, R. (1994), Professor George Dantzig turns 80, *Siam News*, *27*(9). *http://web.stanford.edu/group/SOL/dantzig.html*

[3] Fleuren, H. et al. (2013, Supply Chain–Wide Optimization at TNT Express, *Interfaces*, *43*(1), 5–20

[4] How Target Figured Out A Teen Girl Was Pregnant Before Her Father Did. *www.forbes.com/sites/kashmirhill/2012/02/16/how-target-figured-out-a-teen-girl-was-pregnant-before-her-father-did/*

[5] The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete *www.wired.com/2008/06/pb-theory/*

Over de auteur

John Poppelaars is een gepassioneerd voorstander van wiskunde als een *key business enabler*. Tijdens zijn 25 jaar lange adviescarrière heeft hij klanten uit een verscheidenheid aan sectoren met wiskunde ondersteund bij het verbeteren van hun beslissingen. Hij kreeg in 2012 de prestigieuze INFORMS Franz Edelman Award voor zijn bijdrage aan TNT's 'Global Optimisation Programme'. Naast zijn consultancywerk voor BearingPoint zet Poppelaars zich actief in om publiek bewustzijn te stimuleren voor de toegevoegde waarde van wiskunde voor zowel het bedrijfsleven als de samenleving. Hij houdt bijvoorbeeld een blog bij over het onderwerp ('OR at Work'), waarop hij zijn ervaringen en inzichten deelt over de praktische toepassing van wiskunde. E-mailadres: *john.poppelaars@bearingpoint.com*

VERSCHENEN

KNOPEN IN DE WISKUNDE



Auteurs: Meike Akveld en Ab van der Roest
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015), Zebra 46
ISBN: 978-90-5041-154-7
Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Knopen zijn onderdeel van ons dagelijks leven. Een bergbeklimmer, een zeiler of een kampeerder is volledig vertrouwd met knopen. Dat knopen ook in de belangstelling staan van wiskundigen is minder bekend. In de negentiende eeuw probeerde Lord Kelvin met behulp van knopen de atomen te rangschikken. Hiertoe werd een knopentabel opgezet. Dit wordt gezien als het startpunt van de knopentheorie. In dit Zebra-boekje proberen we een aanzet te geven tot verdere bestudering van de knopentheorie. Het begint makkelijk, maar tegen het einde heb je steeds meer 'echte' wiskunde nodig. Mocht dit je niet zo liggen, probeer het dan nog eens met het allerlaatste, verrassende hoofdstuk. Daarin gaat het niet meer om de wiskunde van knopen, maar om de schoonheid van knopen.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

Wiskunde in Boerhaave

Museum Boerhaave, het Rijksmuseum voor de geschiedenis van de Natuurwetenschappen en van de Geneeskunde te Leiden, heeft een tweetal wiskunderoutes uitgezet. Voor het maken van de opdrachten op de routes is wiskundige kennis nodig. Een leerling die de route wil lopen en de opdrachten wil maken meldt zich bij de balie en krijgt daar een koffer mee. De eenvoudige route is geschikt voor leerlingen havo/vwo vanaf 14 jaar, de moeilijkere is voor leerlingen havo/vwo bovenbouw. Het museum beschikt over zes koffers. De routes zijn te downloaden via de site van het museum.
Naast deze wiskunderoutes heeft het museum een programma voor leerlingen van de derde klas havo en vwo, dat leerlingen helpt bij hun keuze voor de richting wiskunde A, B of C in de bovenbouw. Ook dit programma bestaat uit een rondwandeling langs museumvoorwerpen. Tijd voor een sectie-uitje? Dan is Boerhaave misschien ook wel *the place to be*.
Bron: *www.museumboerhaave.nl/*

Heeft God iets te maken met wiskunde?

Bovenstaande vraag staat centraal in het boek van V.S. Poythress. De Amerikaanse auteur promoveerde zowel in de wiskunde als in de theologie, dus hij weet waarover hij schrijft. De titel van zijn boek is *Redeeming Mathematics*, Verlossende wiskunde. De auteur beantwoordt de vraag overigens met 'Ja' en onderbouwt zijn mening in negentien hoofdstukken. Bron: *Reformatorisch Dagblad*

Einstein-formule op muur - start van reeks van tien


Foto: Hielco Kuipers

Op dinsdagmiddag 24 november onthulde Robbert Dijkgraaf de sleutelformule van Albert Einsteins Algemene Relativiteitstheorie op een buitenmuur van Museum Boerhaave. Het is het startschot voor een reeks van minstens tien formules op Leidse muren die een directe band hebben met de stad. Vormgeving en schilderwerk zijn in handen van de Stichting TEGEN-BEELD, die eerder met ruim 100 Muurgedichten het aanzien van de stad verrijkte. Albert Einstein presenteerde zijn veldvergelijking – het hart van de Algemene Relativiteitstheorie – op 25 november 1915 tijdens een zitting van de Pruisische Academie van Wetenschappen in Berlijn. Op weg naar dit grootse vertoon van denkkracht werd hij vooruitgeholpen door discussies en briefwisselingen met Nederlandse collega's als Lorentz en Ehrenfest. De eerste was zijn intellectuele vader, de tweede zijn boezemvriend bij wie hij steevast logeerde. Over de consequenties van de Algemene Relativiteitstheorie debatteerde Einstein met De Sitter, directeur van de Leidse Sterrewacht. Verder was Einstein vanaf 1920 bijzonder hoogleraar aan de Leidse universiteit. 'Dat verrukkelijke plekje grond op deze dorre aarde', noemde Einstein de stad Leiden.
Bron: *www.museumboerhaave.nl/*

Grafen-isomorfisme dicht bij P

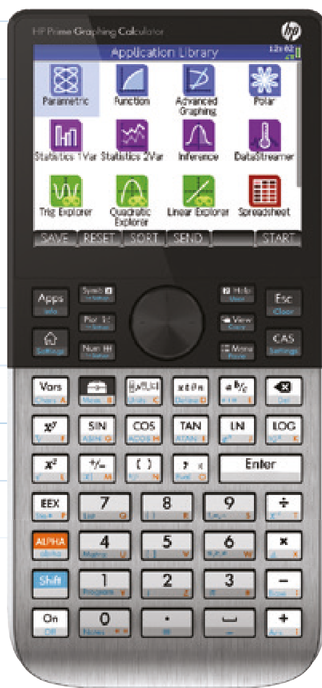


Een belangrijke vraag bij het bestuderen van netwerken is of twee gegeven netwerken misschien verschillende weergaven van hetzelfde ding zijn. Een vraag die voor kleine netwerken met de hand te doen is, maar voor grote netwerken niet. Het probleem van hoeveel meer rekenstappen er nodig zijn bij grotere netwerken lijkt nu opgelost. De Hongaars-Amerikaanse wiskundige Lásló Babai zegt te kunnen aantonen dat het vraagstuk van het zogeheten grafen-isomorfisme in quasipolynomiale tijd (dus redelijk snel) oplosbaar is, al houdt hij nog een slag om de arm (op zijn website meldt hij dat de resultaten nog niet *peer reviewed* zijn). Volgens Lex Schrijver (Centrum voor Wiskunde en Informatica) een behoorlijke doorbraak, het zou kunnen betekenen dat P en NP toch één zijn. Gerhard Woeginger (TU Eindhoven) spreekt van een gigantische stap, maar vindt dit een te specifiek geval en geen algemene oplossing op de vraag of P en NP hetzelfde zijn. Bron: *Volkskrant.*
Bron foto: *http://people.cs.uchicago.edu/~laci/*

Slordige statistiek

Een op de acht artikelen in de psychologische literatuur bevat 'een ernstige statistische fout' die van invloed kan zijn op de uitkomst van de studie. Dat blijkt uit een analyse van Michèle Nuijten (Tilburg University) na een steekproef van ruim 30.000 artikelen uit de afgelopen dertig jaar. Toch heeft Nuijten ook goed nieuws: het relatief aantal fouten is niet toegenomen. Het idee dat de twijfelachtige onderzoekspraktijken steeds meer toenemen, lijkt niet bewaarheid te zijn. De fouten zijn veel eerder een gevolg van structurele slordigheden. Het resultaat van Nuijtens onderzoek komt overeen met eerdere onderzoeken, maar het onderzoek van Nuijten was veel groter van opzet. Dit laatste was mogelijk door het computerprogramma *Statcheck*, ontwikkeld door Nuijten en haar collega Sacha Epskamp. Dit programma kan statistische gegevens uit pdf- en html-tekst halen en checken. Dit geeft direct de mogelijkheid om in de toekomst het percentage fouten te reduceren, aldus de onderzoekers.
Bron: *NRC Weekend*





New Body & New Brain

HP Prime



Komt u naar de NWD?
Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Volledige support Noordhoff voor G&R en MW staat online!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!



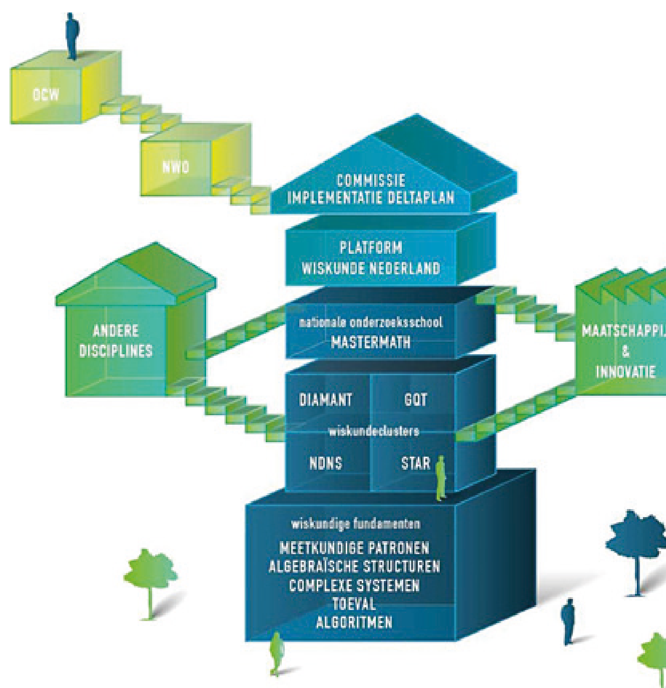
Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop of demo-units neemt u contact op met **p.schadron@hp-prime.nl**.
Uiteraard ook wanneer u níet naar de NWD gaat.

MEDEDELING

EEN DELTAPLAN VOOR DE NEDERLANDSE WISKUNDE



Het Platform Wiskunde Nederland (PWN) publiceerde in 2014 zijn Visiedocument, dat de visie en de ambitie van de Nederlandse wiskunde voor de middellange termijn presenteert. Het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap verzocht de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en PWN de aanbevelingen uit het Visiedocument uit te werken, concrete acties te formuleren en zich te verzekeren van draagvlak voor de realisering daarvan. NWO en PWN hebben een commissie onder leiding van Jacob Fokkema, voormalig rector magnificus van de Technische Universiteit Delft, gevraagd dit werk op zich te nemen. Het heeft geleid tot een Deltaplan voor de Nederlandse Wiskunde, dat op 15 december is aangeboden aan de voorzitters van NWO en PWN. Een samenvatting van de inhoud van het plan was te lezen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van december jongstleden. Dat Deltaplan gaat uiteindelijk ook alle docenten in het voortgezet onderwijs aan. In de samenvatting staat te lezen:

De wiskunde-instituten moeten samen met de instituten voor de lerarenopleiding aantrekkelijke en flexibele routes naar de eerstegraadsbevoegdheid creëren en de vakdidactiek dichter bij de vakinhoud plaatsen. Het aanbod van nascholing is divers maar onoverzichtelijk, de vraag ernaar is groot. Wij stellen voor dat PWN, samen met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de vaksteunpunten wiskunde, een digitale nascholingscatalogus opzet en een financieel stabiel model ontwikkelt voor de organisatie van nascholingscursussen en voor de certificering van eerste- en tweedegraadsbevoegdheden wiskunde.

Het genoemde artikel van de commissie Fokkema uit het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en het Deltaplan zelf zijn te lezen op de website van *Euclides*.

vakbladeuclides.nl/914fokkema

vakbladeuclides.nl/914deltaplan

GETUIGEN

LOBATTO'S LESSEN

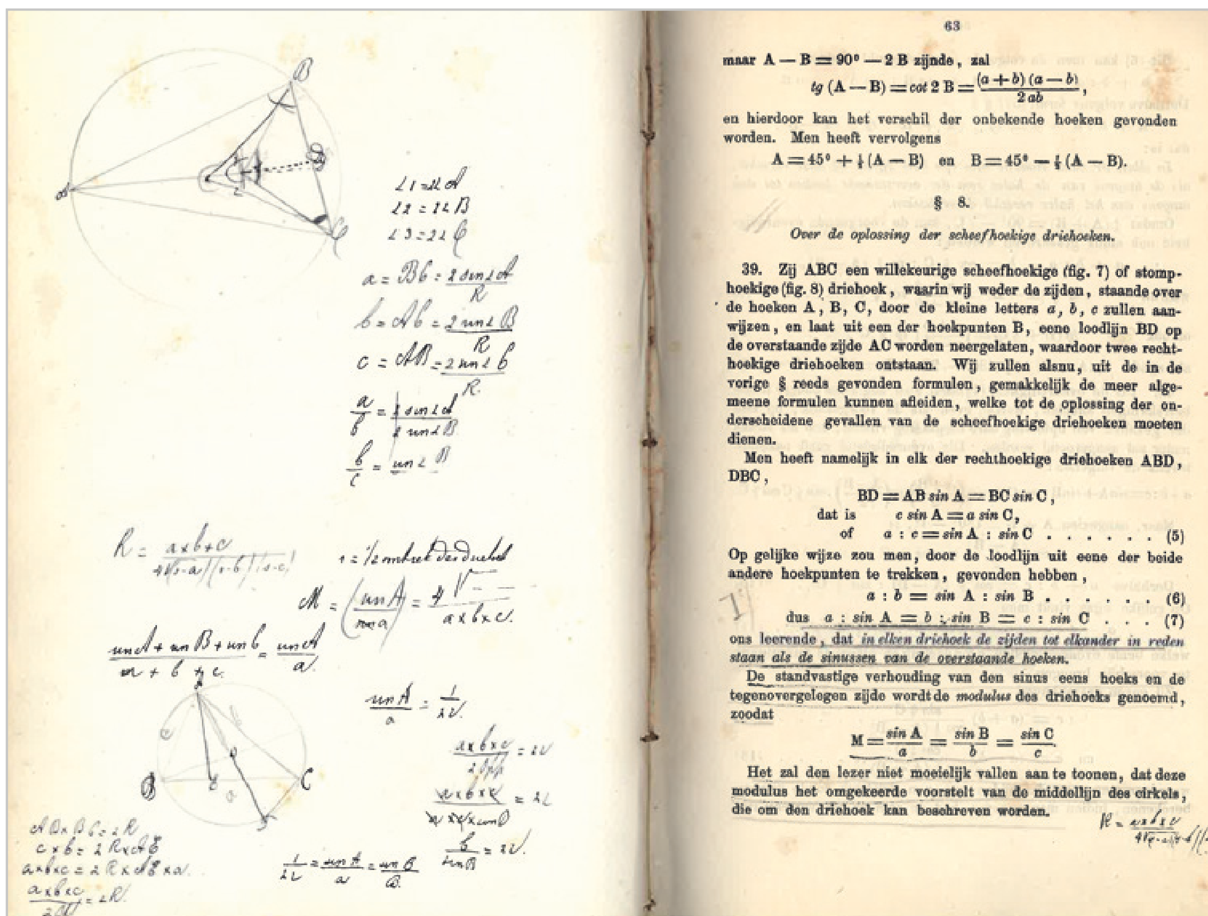
Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Aantekeningen van leerlingen uit een ver verleden geven een aardig kijkje in oude lespraktijken. Natuurlijk is het altijd oppassen hoe je de aantekeningen vandaag de dag interpreteert, vooral als niet bekend is wie de leerling in kwestie was. Het kan zijn dat je net de aantekeningen van die ene hele slimme leerling te pakken hebt, die zich niets aantrok van de docent en zijn eigen gedachten opschreef. Of je treft juist de schrijfsels van een hele domme leerling die braaf uitsluitend dat heeft opgeschreven wat de meester (of een medeleerling!) hem dicteerde. Of wellicht kijk je naar de krabbels van een leerling van wie het werk streng gecontroleerd werd door zijn ouders, en die er zich met de minst mogelijke inspanning vanaf wilde maken. Desalniettemin bieden aantekeningen van leerlingen uit het verleden een blik achter de schermen: hoe specifiek de situatie ook is, dichter bij de authentieke lessituatie kun je niet komen. In mijn verzameling boeken bevindt zich een beduimeld exemplaar van Lobatto's *Leerboek der Regtlijnige en Bolvormige Driehoeksmeting*, een vierde editie uit 1877, bewerkt door de Leidse hoogleraar P. van Geer. Op zich is het geen bijzonder boek. Het was een tamelijk traditionele, negentiende-eeuwse introductie tot de goniometrie. Maar dit exemplaar was in het bezit van een ijverige laatnegentiende-eeuwse leerling, die

figuur 1 Lobatto, *Regtlijnige en bolvormige driehoeksmeting* (1877), pagina 63 met aantekeningen



63

maar $A - B = 90° - 2B$ zijnde, zal

$$tg\,(A - B) = cot\,2B = \frac{(a + b)(a - b)}{2ab},$$

en hierdoor kan het verschil der onbekende hoeken gevonden worden. Men heeft vervolgens

$$A = 45° + \tfrac{1}{2}(A - B) \quad \text{en} \quad B = 45° - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

§ 8.

Over de oplossing der scheefhoekige driehoeken.

39. Zij ABC een willekeurige scheefhoekige (fig. 7) of stomphoekige (fig. 8) driehoek, waarin wij weder de zijden, staande over de hoeken A, B, C, door de kleine letters a, b, c zullen aanwijzen, en laat uit een der hoekpunten B, eene loodlijn BD op de overstaande zijde AC worden neergelaten, waardoor twee rechthoekige driehoeken ontstaan. Wij zullen alsnu, uit de in de vorige § reeds gevonden formulen, gemakkelijk de meer algemeene formulen kunnen afleiden, welke tot de oplossing der onderscheidene gevallen van de scheefhoekige driehoeken moeten dienen.

Men heeft namelijk in elk der rechthoekige driehoeken ABD, DBC,

$$BD = AB\,sin\,A = BC\,sin\,C,$$

dat is $\quad c\,sin\,A = a\,sin\,C,$

of $\quad a : c = sin\,A : sin\,C \quad \ldots\ldots \quad (5)$

Op gelijke wijze zou men, door de loodlijn uit eene der beide andere hoekpunten te trekken, gevonden hebben,

$a : b = sin\,A : sin\,B \quad \ldots\ldots \quad (6)$

dus $\quad a : sin\,A = b : sin\,B = c : sin\,C \quad \ldots \quad (7)$

ons leerende, dat *in elken driehoek de zijden tot elkander in reden staan als de sinussen van de overstaande hoeken.*

De standvastige verhouding van den sinus eens hoeks en de tegenovergelegen zijde wordt de *modulus* des driehoeks genoemd, zoodat

$$M = \frac{sin\,A}{a} = \frac{sin\,B}{b} = \frac{sin\,C}{c}$$

Het zal den lezer niet moeielijk vallen aan te toonen, dat deze modulus het omgekeerde voorstelt van de middellijn des cirkels, die om den driehoek kan beschreven worden.

werk maakte van zijn lessen goniometrie. Of hij er lol aan had of dat hij er gewoon hard op moest blokken om een examen te kunnen halen is niet op te maken, maar hij had dit boekje doorschoten met extra vellen papier om er aantekeningen op te kunnen maken. Die aantekeningen vertonen alle sporen van een lessituatie. Het is duidelijk dat een docent de leerling hier en daar extra opdrachten gaf, en hen dan weer een passage uit het boek nader liet uitwerken.

Figuur 1 laat precies zien wat de student voor zijn neus had. Op pagina 63 van het boek kan men een mooi beeld krijgen van wat de leerling deed. Links het doorgeschoten blad waarop hij aantekeningen maakte, in het midden de pagina van het boek en rechts de uitgeklapte plaat met de figuren die bij deze pagina hoorden. Die platen zaten achter in het boek en door ze uit te klappen kwamen ze naast de bladzijde te liggen waar hij naar keek.

Het deel waarover hij aantekeningen had gemaakt ging over de sinusregel. De sinusregel werd in het boek afgeleid met hulp van figuren 7 en 8, zie figuur 2. De student had de resulterende formule en een aantal stukken die daarna kwamen onderstreept met potlood. In de bovenste helft van de aantekening staat een poging tot een alternatieve afleiding van de sinusregel, waarbij hij gebruik maakte van de omgeschreven cirkel met straal R en een aantal eigenschappen van (drie)hoeken in cirkels. Daar kwam de student niet helemaal uit, maar het idee was aardig. In het stuk direct na de sinusregel werd in het boek van Lobatto de modulus van een driehoek gedefinieerd als de verhouding tussen sinus van een hoek en de lengte van de overliggende zijde. In het boek stond op dat punt te lezen dat de lezer gemakkelijk aan kon tonen dat die modulus gelijk was aan het omgekeerde van de middellijn van de omgeschreven cirkel van de driehoek. Die opmerking heeft de docent aan de leerling meegegeven om uit te werken. Dat heeft deze leerling gedaan op de onderste helft van het doorgeschoten blad. Daar in de aantekening treft men een bibberig en scheef getrokken potlood-driehoek met omgeschreven cirkel.

De hulplijntjes, de namen van de hoekpunten en de bijbehorende berekeningen zijn in pen er met vaste hand bij gekrabbeld. Was het echt een eenvoudige exercitie voor de leerling, of heeft hij een paar hints gekregen? Dat is niet duidelijk; de uitwerking gaat met horten en stoten, zoveel is wel helder. In eerste instantie poogde de leerling om een bekende formule voor de omtrek van de omgeschreven cirkel te gebruiken. Daar kwam hij niet verder mee. Links onder op het papier had hij (beginnend met een foutje) een meer bruikbare formule afgeleid die hij rechts naast de figuur gebruikte om aan te tonen dat de diameter van de omgeschreven cirkel inderdaad gelijk was aan het omgekeerde van de modulus.

Een aantal pagina's verderop had de leerling de vergelijking $\sin^6 x + \cos^6 x = p$ opgelost door op een handige manier gebruik te maken van de formules voor goniometrie. Voor de liefhebber: delen door $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ leverde $\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = p$, hetgeen door links en rechts toevoegen van $3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ omgeschreven werd naar $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = p + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ waaruit volgde $\sin(2x) = \pm\sqrt{4/3 \cdot (1 - p)}$ via de formule voor de sinus van de dubbele hoek en een worteltrekking (een slimme collega attendeerde me er overigens op dat het ook met een eenvoudige substitutie $y = \sin^2 x$ lukt). Het is duidelijk een opdracht die door een docent was toegevoegd aan het boek en die de student had proberen op te lossen. Hij had zich een keer vergist maar slaagde erin. De docent testte zijn leerling blijkbaar met dit soort vergelijkingen of hij had er zelf lol in om ze op te lossen, want het virtuoze formulegebruik – dat in de loop van de twintigste eeuw zou ontaarden tot een doel op zichzelf – kwam nog een paar keer terug. De docent had ook een paar oude examenopgaven als opdracht meegegeven. Het betroffen opdrachten uit 1883 en 1884, hetgeen het mogelijk maakt om de aantekeningen te dateren op de periode 1885-1890. Het stuk over de bolmeetkunde had deze leerling niet uitgewerkt. Dat behoorde blijkbaar niet tot de examenstof – of zou hij er doortrapt en calculerend op gegokt hebben dat hij wel een voldoende kon halen met alleen de kennis de vlakke goniometrie?

figuur 2 Lobatto, *Regtlijnige en Bolvormige driehoeksmeting* (1877), plaat II

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*



GESCHIEDENIS IN DE WISKUNDELES

EEN STUDIE NAAR HET MOTIVEREN VAN LEERLINGEN

Sanne Deckwitz

Sanne Deckwitz wilde graag haar achtergrond als historica gebruiken en daarmee onderzoeken op welke manier de geschiedenis van de wiskunde kan worden ingezet in de wiskundeles om leerlingen beter te motiveren. Een overzicht van haar bevindingen.

Introductie

Hoewel ik van oorsprong historica ben, besloot ik een aantal jaar geleden de overstap naar het onderwijs te maken als wiskundedocent. Inmiddels is dit mijn derde schooljaar voor de klas en in de tussentijd heb ik mijn tweedegraads lesbevoegdheid gehaald. Toen ik in het voorjaar van 2015 aan mijn afstudeeronderzoek begon, hoefde ik niet lang na te denken over een onderwerp: geschiedenis van de wiskunde. Ik heb me daarbij specifiek gericht op het meetkundeonderwijs aan de eerste klassen havo en vwo.

Huidige stand van zaken

Mijn zoektocht begon met het inventariseren van de huidige stand van zaken. Daarbij heb ik gekeken naar de plek die de geschiedenis van de wiskunde inneemt in de kerndoelen voor de onderbouw, welke historische referenties er voorkomen in *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* en wat voor alternatief materiaal er beschikbaar is. Hoewel de kerndoelen voor de onderbouw het onderwerp niet specifiek noemen, kunnen er uit zowel de algemene karakteristiek als de karakteristiek voor het domein *Rekenen en wiskunde* argumenten gehaald worden voor het inzetten van de geschiedenis tijdens de wiskundeles. Zo wordt er aangemoedigd om vakoverstijgend les te geven, kinderen kennis te laten maken met de 'volle breedte van toepassingsgebieden van rekenen en wiskunde' en wordt het verband tussen rekenen/wiskunde en andere vakgebieden benadrukt.[1] In de boeken van *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* voor de eerste klassen havo en vwo komt de geschiedenis van de wiskunde echter maar incidenteel aan bod. Bovendien betreft het extra informatie die gemakkelijk weggelaten kan worden. Desalniettemin is er op internet, in boeken en op dvd's interessant materiaal te vinden voor het inzetten van de geschiedenis tijdens de wiskundeles. Denk bijvoorbeeld aan het onderdeel *5000 jaar wiskunde* op de website *www.math4all.nl*, de BBC documentaires *The story of maths* en *The story of 1* en de 'doe het zelf' ideeën uit het boek *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* van Jeanine Daems en Ionica Smeets.

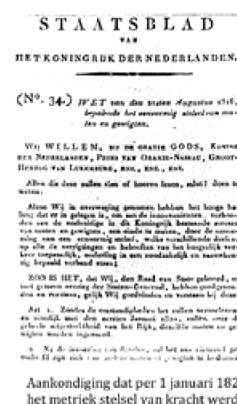
Leren en motiveren

Vervolgens ben ik de bestaande literatuur ingedoken om antwoord te vinden op de vragen wat het belang is van motivatie, wat de verschillen zijn tussen extrinsieke en intrinsieke motivatie en hoe leerkrachten de motivatie van leerlingen kunnen beïnvloeden. Allereerst is het belangrijk om als docent oog te hebben voor de motivatie van leerlingen, omdat motivatie leidt tot een betere kwaliteit van leren, meer betrokkenheid van leerlingen en meer plezier in school.[2] Eén van de meest invloedrijke theorieën op het gebied van leren en motiveren is de zelfdeterminatietheorie van Ryan & Deci.[3,4] Daarin wordt onder andere een onderscheid gemaakt tussen extrinsieke en intrinsieke motivatie. Bij extrinsieke motivatie verloopt het leren niet spontaan, maar is het afhankelijk van het bereiken van een doel dat buiten het leren zelf is gelegen. De zelfdeterminatietheorie onderscheidt hierin vier verschillende vormen: externe, geïntrojecteerde, geïdentificeerde en geïntegreerde regulatie. Daarbij lijkt de laatste vorm in veel opzichten op intrinsieke motivatie, maar het verschil zit erin dat geïntegreerde regulatie voortkomt uit andere drijfveren dan het bezig zijn met de leeractiviteit zelf, terwijl leerlingen bij intrinsieke motivatie een leeractiviteit uitvoeren omdat ze die activiteit interessant vinden en/of plezierig om te doen. Intrinsieke motivatie, ten slotte, leidt tot de hoogste kwaliteit van leren. De basis hiervoor wordt gevormd door de behoeften aan competentie, autonomie en sociale verbondenheid. Echter, omdat intrinsieke motivatie binnen het onderwijs lang niet altijd vanzelfsprekend is, zal de leerkracht zich in moeten zetten voor het bevorderen van geïdentificeerde en geïnte-

figuur 1 Uit het werkblad *Oude Meeteenheden*

Door de Nederlandse IJkwet van 1816 werd het metriek stelsel vanaf 1820 verplicht ingevoerd in het toenmalige Verenigd Koninkrijk der Nederlanden. Het doel van deze wet was om standaarden vast te stellen voor de eerlijkheid in de handel. De 'Dienst van het IJkwezen' controleerde deze standaarden. Het metriek stelsel uit 1820 was gebaseerd op de meter, maar gebruikte nog steeds benamingen van vóór die tijd. Dat zag er als volgt uit:

1 Nederlandse pond	=	1 kilogram
1 Nederlandse ons	=	0,1 kilogram
1 Nederlandse mijl	=	1000 meter
1 Nederlandse roede	=	10 meter
1 Nederlandse el	=	1 meter
1 Nederlandse palm	=	0,1 meter (1 dm)
1 Nederlandse duim	=	0,01 meter (1 cm)
1 Nederlandse streep	=	0,001 meter (1 mm)
1 Nederlandse bunder	=	10.000 m^2
1 Nederlandse mud	=	0,1 m^3
1 Nederlandse kop	=	0,001 m^3 (1 liter)


STAATSBLAD
VAN
HET KONINGRIJK DER NEDERLANDEN.

(N°. 34.) WET van den ... Augustus 1816, ...

Wij WILLEM, bij de gratie Gods, ...

Aankondiging dat per 1 januari 1820 het metriek stelsel van kracht werd.

greerde vormen van extrinsieke motivatie. De factoren die daaraan bijdragen zijn procesgeoriënteerde instructie, differentiatie, aansluiting bij de leefwereld van leerlingen en samenwerkend leren.[5]

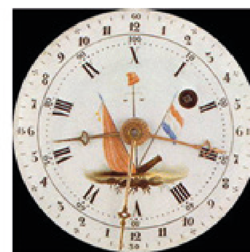
Geschiedenis als motivatiewerktuig

Dan rijst de vraag welke rol de geschiedenis van de wiskunde kan spelen binnen deze motivatiefactoren. Bij procesgeoriënteerde instructie kan bijvoorbeeld worden gedacht aan geleide herontdekking of het zelfstandig bestuderen van primaire bronnen. Zo kun je leerlingen kopieën van een kleitablet met Babylonisch spijkerschrift geven en ze vragen wat de symbolen volgens hen zouden kunnen betekenen. Wat betreft differentiatie biedt de geschiedenis een bijna onuitputtelijk repertoire waaruit inspiratie kan worden gehaald voor extra ondersteuning of uitdaging. Als het gaat om de leefwereld van de leerlingen biedt de geschiedenis ook een aantal aanknopingspunten. Allereerst wordt wiskunde vaak gezien als een product van de westerse beschaving, maar de geschiedenis laat zien dat andere culturen ook heel invloedrijk zijn geweest in het ontwikkelen van belangrijke concepten.[6] Waardering voor het culturele erfgoed van deze beschavingen kan daarom aansluiten bij de leefwereld van leerlingen met een niet-westerse afkomst. Verder laat de geschiedenis van de wiskunde zien dat er zowel mannelijke als vrouwelijke wiskundigen zijn geweest, iets wat meisjes zou kunnen aanspreken en motiveren voor het vak.[7] Daarnaast blijkt uit onderzoek van Hong en Lin-Siegler dat het gebruik van biografieën leerlingen kan helpen om wiskundigen te zien als hardwerkende mensen die veel moeite hebben moeten doen om vooruitgang te boeken.[8] Veel leerlingen realiseren zich niet dat wiskunde is ontwikkeld door mensen of zij denken dat alleen buitengewoon slimme mensen in de wiskunde kunnen werken. De geschiedenis kan daarom de menselijke kant van wiskundige activiteiten benadrukken, wat het vak toegankelijker kan maken. Ten slotte kan de geschiedenis van de wiskunde worden ingezet bij de drie basisstructuren van samenwerkend leren: check-in-duo's, denken-delen-uitwisselen en eenvoudige experts.[9]

Lesmateriaal

Aan de hand van deze inzichten heb ik lesmateriaal over de geschiedenis van de wiskunde samengesteld dat gebruikt kan worden bij het behandelen van het metriek stelsel en berekeningen met het getal π in de eerste klassen havo en vwo. Het materiaal bestaat uit een aantal videofragmenten met kijkvragen, vier verschillende werkbladen (over oude meeteenheden, Euclides, Archimedes en Ludolph van Ceulen) en een kruiswoordpuzzel. Daarnaast is er een PowerPoint die de verschillende onderdelen met elkaar verbindt, een docentenhandleiding en een uitwerkingenblad. Tijdens het eerste onderdeel bekijken de leerlingen een aantal videofragmenten en beantwoorden de bijbehorende kijkvragen.

Aan het einde van de 18e eeuw is er in Frankrijk een poging gedaan om de tijdsmeting ook op tien te baseren. De dagen bestonden uit tien uren, er gingen honderd minuten in één uur en honderd seconden in één minuut. De bevolking kon echter niet wennen aan deze indeling. Een half jaar na de invoering werd de nieuwe tijdsindeling alweer afgeschaft. Men keerde terug naar het vertrouwde systeem van zestig seconden in één minuut en zestig minuten in één uur. Noem een voordeel van het gebruik van dit zestigtallig stelsel.



Franse klok met de dag verdeeld in 10 of 12 uur.

figuur 2 Uit het werkblad *Oude Meeteenheden*

Daarna gaan zij in groepjes aan de slag met een van de werkbladen. Na het doorlezen van de informatie en het maken van de opdrachten, maakt ieder groepje een korte presentatie over wat ze geleerd hebben. Vervolgens worden er nieuwe groepjes gemaakt, waarbij er van ieder werkblad ten minste één iemand aanwezig is. In deze samenstelling vullen de leerlingen de kruiswoordpuzzel in. Ik heb dit lesmateriaal in mijn eigen brugklassen uitgetest en de leerlingen na afloop gevraag een enquête in te vullen waarbij zij konden aangeven in hoeverre ze het eens waren met diverse stellingen die betrekking hadden op de vier hierboven genoemde motivatiefactoren. De uitslag van deze leerlingenenquête alsook mijn persoonlijke ervaringen en observaties lieten zien dat de motivatie van de leerlingen hoog was. In dit opzicht kan het ontwikkelde lesmateriaal daadwerkelijk als een voorbeeld worden gezien van hoe de geschiedenis van de wiskunde kan worden ingezet binnen het domein meetkunde om leerlingen van de eerste klassen havo en vwo beter te motiveren.

Terugblik

Desalniettemin kwam er ook een aantal verbeterpunten naar voren. Zo was de oorspronkelijke tijdsindicatie te krap en kon een aantal opgaven scherper geformuleerd worden. Daarnaast heb ik de leerlingen in eerste instantie de werkbladen onderling laten verdelen, maar adviseer ik om dat in het vervolg door de leerkracht te laten doen. Op die manier kan er beter gebruik gemaakt worden van de (subtiele) niveauverschillen tussen de werkbladen. Verder zou er meer aandacht kunnen worden besteed aan het ontwikkelen van studievaardigheden. Daarnaast roept dit onderzoek op tot diverse vragen voor vervolgonderzoek. Op welke manier kan de geschiedenis van de wiskunde worden ingezet binnen het vmbo om leerlingen beter te motiveren? Hoe kan de geschiedenis van de wiskunde worden toegepast binnen de algebra en statistiek? En wat is de interesse van leerlingen voor het onderwerp zelf? Spreken bepaalde delen van de geschiedenis meer aan dan andere? Ten slotte zou het zeer praktisch zijn om te onderzoeken op welke manier het bestaande materiaal over de geschiedenis van de wiskunde toegankelijk kan worden gemaakt voor een breed publiek. Een website waarbij de onderwerpen niet alleen gerangschikt worden per deelgebied (meetkunde, algebra, statistiek), maar

bijvoorbeeld ook aan de hand van een tijdlijn of geografische locatie zou leerlingen de mogelijkheid geven om zelf verbindingen te maken tussen historische ontwikkelingen en deze met elkaar te vergelijken.

Tot slot

Ik wil graag Desiree van den Bogaart bedanken voor de inspirerende colleges over de geschiedenis van de wiskunde op de Hogeschool van Amsterdam en het begeleiden van mijn afstudeeronderzoek. Het lesmateriaal is te vinden op *vakbladeuclides.nl/914deckwitz*.

Noten

[1] Onderbouw-VO (2006). *Karakteristieken en kerndoelen voor de onderbouw*. Geraadpleegd op 17 maart 2015 via *http://www.slo.nl/voortgezet/onderbouw/kerndoelen/Karakteristieken_en_kerndoelen_voor_de_onderbouw.pdf/*

[2] Ros, A., Timmermans, R., Hoeven, J. van der & Vermeulen, M. (2009). *Leren en laten leren: ontwerpen van leeractiviteiten voor leerlingen en docenten*. Alphen aan den Rijn: Kluwer.

[3] Ryan, R.M. & Deci, E.L. (2000a). 'Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions', *Contemporary educational psychology 25*(1), pp. 54-67.

[4] Ryan, R.M. & Deci, E.L. (2000b). 'Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being', *The American psychologist 55*(1), pp. 68-78.

[5] Schuit, H., Vrieze, I. de & Sleegers, P. (2011). *Leerlingen motiveren: een onderzoek naar de rol van leraren*. [s.l.]: Ruud de Moor Centrum/Open Universiteit.

[6] Joseph, G.G. (2011). *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. Princeton, NJ [etc]: Princeton University Press.

[7] Gulikers, I. & Blom, K. (2001). 'A historical angle: a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education', *Educational studies in mathematics 47*(2), pp. 223-258.

[8] Hong, H.-Y. & Lin-Siegler, X. (2011). 'How learning about scientists' struggles influences students' interest and learning in physics', *Journal of educational psychology 104*(2), pp. 469-485.

[9] Ebbens, S. & Ettekoven, S. (2005). *Effectief leren: basisboek*. Houten: Wolters Noordhoff.



vakbladeuclides.nl/914deckwitz

Over de auteur

Sanne Deckwitz is werkzaam als wiskundedocent op het Bertrand Russell College in Krommenie. E-mailadres: *sannedeckwitz@gmail.com*

HET FIZIER GERICHT OP...

BEROEPSGERICHTE WISKUNDEDIDACTIEK

Arthur Bakker



In deze rubriek belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering schrijft Arthur Bakker over het beroepsgerichte wiskundeonderwijs.

Er is grote behoefte aan een wiskundedidactiek voor het beroepsonderwijs. Binnen het beroepsonderwijs hebben we niet alleen andere typen leerlingen maar is ook andere wiskunde relevant. Voor leerlingen in het vmbo, mbo en hbo is het extra belangrijk om duidelijk te maken waarvoor die abstracte kennis en vaardigheden nuttig zijn. Voor velen van hen helpt het om de wiskunde die relevant is voor hun toekomstige beroepenveld te relateren aan beroepstaken.
Ongeveer 60% van onze leerlingen doorloopt de route mbo via vmbo, en toch is de wiskundedidactiek voor deze doelgroep nog niet ver ontwikkeld. Er wordt nauwelijks onderzoek gedaan op dit terrein. Een typerend voorbeeld is de commissie waar ik in heb gezeten voor Platform Wiskunde Nederland (PWN). Onze taak was om het onderzoek naar het wiskundeonderwijs in Nederland in kaart te brengen.[1] De opdracht was expliciet gericht op algemeen voortgezet onderwijs. Basisonderwijs en beroepsonderwijs bleven op die manier buiten beeld.
En zo gaat het heel vaak. PWN en bètafaculteiten zijn gericht op de nieuwe lichting mogelijke wiskundestudenten – gelukkig een groeiende groep maar nog steeds een heel klein percentage van alle burgers die met wiskunde in hun leven of beroep te maken hebben.
In deze FIzier staat een themanummer in *Educational Studies in Mathematics* over beroepsgerichte wiskundedidactiek in de schijnwerper.[2] Twee vragen staan centraal in dit themanummer:

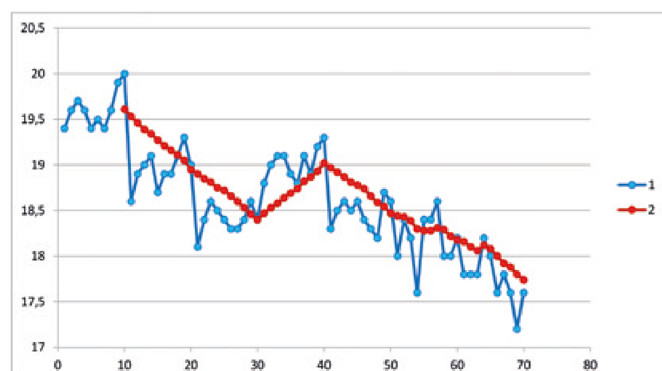
1. Wat karakteriseert die beroepsgerichte wiskundige kennis?
2. Hoe kunnen we leerlingen in het beroepsonderwijs helpen die beroepsgerichte wiskundige kennis te ontwikkelen?

Er zijn voorbeelden van onderwerpen die in het algemeen voortgezet onderwijs niet aan bod komen maar in

beroepssituaties veel voorkomen. Te denken valt aan het voortschrijdend gemiddelde, het gemiddelde van steeds de laatste, zeg, tien metingen. In heel veel bedrijfsprocessen wordt een dergelijk getal bijgehouden en grafisch weergegeven. Lokale variatie wordt gladgestreken zodat algemene trends te zien zijn, zie figuur 1. Als de trend afwijkt van de doelwaarde moet worden ingegrepen.

Uiteraard gaat het niet om totaal andere wiskunde. Eén plus één blijft twee. Maar de wiskunde is binnen beroepssituaties wel vaak erg specifiek verknoopt met praktische doelen. Denk aan kwaliteitsbewaking en logistiek, risico-inschatting of voorspellingen. Wat leert het themanummer ons nu over beroepsgerichte wiskundedidactiek? Hahn laat zien hoe managementstudenten eenvoudige statistiek leren toepassen voor een businessplan.[3] Software waarin simpele berekeningen zijn gekoppeld aan een veelvoorkomende beroepstaak binnen laboratoriumtechniek blijkt een effectieve manier om verhoudingen te leren. Op deze manier leren studenten van de laboratoriumopleidingen makkelijk om concentraties van chemische stoffen te berekenen.[4] Een heel andere benadering is via *boundary crossing* – het heen én weer bewegen tussen opleiding en werk.[5] Met gerichte vragen worden mbo-leerlingen naar hun stageplek gestuurd, en reflecteren daar weer op tijdens de opleiding op de terugkomdagen. Op deze manier leren ze de wiskunde van de lessen koppelen aan praktijksituaties. Dat gebeurt veelal met Excel, de software die in veel bedrijven wordt gebruikt omdat die altijd voorhanden is.
We hopen dat dit themanummer lerarenopleidingen en andere instanties stimuleert om meer aandacht te besteden aan wat leraren kunnen doen om wiskunde relevant te maken voor leerlingen in het beroepsonderwijs. En, surprise, surprise: de meeste leerlingen in het algemeen voortgezet onderwijs willen eigenlijk ook heel graag weten waarvoor ze die wiskunde later kunnen gebruiken.[6] Dus ook de algemene wiskundedidactiek kan profiteren van een beroepsgerichte wiskundedidactiek in wording!

figuur 1 Productieproces met metingen (dikte van plasticfolie in micrometer) en voortschrijdend gemiddelde van de laatste tien metingen.



Noten

[1] Verhoef, N. et al. (2014). *Tussen wal en schip. Wiskundig didactisch onderwijsonderzoek in Nederland.* Platform Wiskunde Nederland.
[2] Bakker, A. (2014). Characterising and developing vocational mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics* (open access).
[3] Hahn, C. (2014). Linking academic knowledge and professional experience in using statistics: A design experiment for business school students. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 239-251.
[4] Bakker, A. et al. (2014). Proportional reasoning in the laboratory: An intervention study in vocational education. *Educational Studies in Mathematics* (open access).
[5] Bakker, A., & Akkerman, S. F. (2014). A boundary-crossing approach to support students' integration of statistical and work-related knowledge. *Educational Studies in Mathematics* (open access).
[6] Dierdorp, A. et al. (2014). Meaningful statistics in professional practices as a bridge between mathematics and science: an evaluation of a design research project. *International Journal of STEM Education*, *1*(1), 1-15.

Over de auteur

Arthur Bakker is universitair hoofddocent aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Hij heeft aan de University of London onderzoek gedaan naar zogeheten *Techno-mathematical Literacies* in de beroepspraktijk (2004-2007), en in Nederland onderzocht hoe mbo'ers beroepsgerichte wiskundige kennis kunnen ontwikkelen (2007-2011). E-mailadres: *A.Bakker4@uu.nl*

HOE ONEIGENLIJK IS 'ONEIGENLIJK'?

Martin Kindt

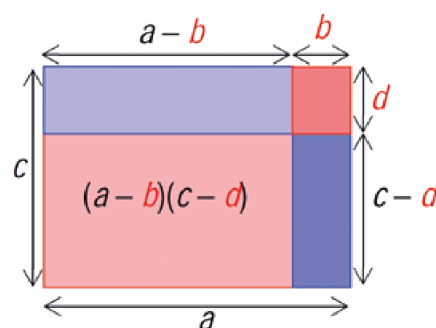
Dit is het tweede artikel in een serie-van-drie van Martin Kindt over het 'permanentie-principe'. Het voortzetten van patronen met behoud van regelmaat en rekenwetten is in de wiskunde schering en inslag. Zoals bijvoorbeeld de invoering van de zogenaamde oneigenlijke machten. De 'extrapolatie-kampioen' aller tijden is misschien wel de Engelse wiskundige John Wallis, die hier al even aan bod komt, maar die in de volgende aflevering in het middelpunt staat.

Min maal min is plus

De bekendste toepassing van het permanentieprincipe in het wiskundeonderwijs is het rekenen met 'plus en min'. Men kan allerlei verhaaltjes bedenken, heksen en zo, en dat slaat dan aan bij leerlingen, maar daarmee wordt verdoezeld dat de bewerkingen slechts berusten op extrapolatie van bekende rekenregels die gelden voor positieve getallen. Bij de invoering van negatieve getallen is de naar twee kanten doorlopende getallenlijn het ultieme model. Optellen en aftrekken kunnen met pijlen (vectoren) aanschouwelijke worden gemaakt. Doelsaldi en temparatuurverschillen (thermometer als getallenlijn) helpen om het opereren met positieve en negatieve getallen concreet te maken.

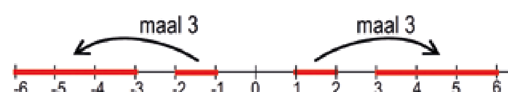
Het vermenigvuldigen met negatief en positief gaat minder natuurlijk en heeft didactici in de loop der tijden veel hoofdbrekens bezorgd. Voordat ik mijn favoriete aanpak verklap, kijk ik hoe wiskundigen uit het verleden hier mee omgingen. Leonhard Euler (1707-1783) vond zichzelf niet te groot om naast al zijn baanbrekende werk een leerboek elementaire algebra te schrijven.[1] De derde paragraaf draagt de titel *Von der Multiplication einfacher Grössen* en daarin behandelt hij de vermenigvuldiging met negatieve getallen. Hij gebruikt de *Buchstaben* a en b voor willekeurige positieve getallen en zegt dan bijvoorbeeld dat als $-a$ een schuld aangeeft het duidelijk is dat vermenigvuldiging van die schuld met 3 een grotere schuld geeft, en wel $-3a$. Of algemener: $-a$ *vermenigvuldigd met* b geeft $-ba$ of (wat hetzelfde is) $-ab$. Maar hoe zit het met $-a$ *vermenigvuldigd met* $-b$? Daar kan natuurlijk niet hetzelfde uitkomen als bij $-a$ *vermenigvuldigd met* b. Er moet, aldus Euler, het tegengestelde van $-ab$ uitkomen en dat is ab. Dat mag je wel een sterk staaltje van intimidatie noemen.

Felix Klein laat een helder licht schijnen over het *Prinzip der Permanenz der formalen gesetze* dat hij toeschrijft aan Hermann Hankel.[2] Hij neemt het product $(a-b)(c-d)$ onder de loep waarbij $a > b$ en $c > d$ en gebruikt een rechthoek om te demonstreren dat de uitkomst hiervan gelijk is aan $ac - ad - bc + bd$. Zie figuur 1: trek van de grote rechthoek ($= ac$) de twee smalle rechthoeken (ad en bc) af en tel de overlap bd er vervolgens weer bij. Op zich een mooi voorbeeld van 'geometrische algebra'. Als men nu de formule toepast op het geval $a = c = 0$, komt er de regel $(-b)(-d) = bd$. Klein hekelt de leerboeken waarin dit als een soort van bewijs wordt gepresenteerd: die gaan volledig voorbij aan het feit dat de formule slechts is afgeleid voor het geval $a > b$ en $c > d$.



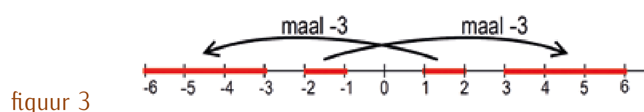
figuur 1

Klein vervolgt: *it is idle to talk of the logical necessity of the theorem, in other words, the rule of signs is not susceptible of proof; one can only be concerned with recognizing the logical permissibility of the rule...* Zijn boodschap is dat men in het onderwijs nooit de suggestie moet wekken dat op permanentie berustende conventies bewijsbaar zouden zijn. Mijn voorkeur om de afspraak 'min maal min is plus' te laten aanvaarden gaat opnieuw uit naar de getallenlijn. Als je een positief getal met 3 vermenigvuldigt, betekent dit een verdrievoudiging van de afstand tot 0 (op het positieve deel van de getallenlijn) van dit getal. Bij 3 keer een negatief getal vergroot je de afstand 'natuurlijk' op het negatieve deel van de getallenlijn. Je kunt deze (meetkundige) vermenigvuldiging ook toepassen op een interval, zie figuur 2.



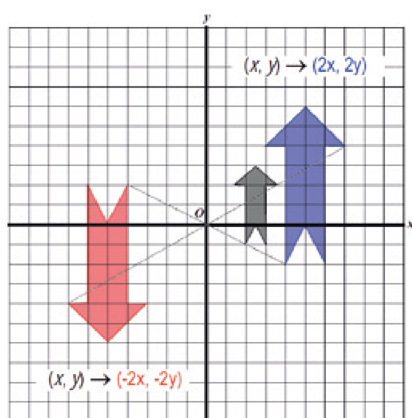
figuur 2

Het idee van vergroting komt zo beter in beeld. Dat vermenigvuldiging met –3 een vermenigvuldiging is van de afstand, gecombineerd met een spiegeling op de getallenlijn, is de nieuwe afspraak, zie figuur 3.



figuur 3

De keus hierbij is dan of je dit eerst via voortzetting van de commutativiteit, bijvoorbeeld $(-3) \times 2 = 2 \times (-3) = (-3) + (-3)$ wilt inleiden of meteen maar het meetkundige beeld presenteren. Een voordeel van de intervalpresentatie is wel dat de afspraak ook in eerste instantie niet beperkt is tot gehele getallen. Dat bekende eigenschappen voor natuurlijke getallen, zoals de distributiviteit, blijven kloppen moet zeker worden nagegaan; het vertrouwen in de afspraak zal moeten groeien! Als later het coördinatenstelsel ten tonele verschijnt, kan de vermenigvuldiging van figuren vanuit de oorsprong met positieve of negatieve factor, dit vertrouwen verder versterken, zie figuur 4.



figuur 4

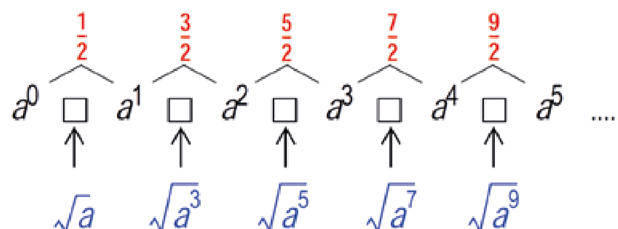
Oneigenlijke machten

Het definiëren van machten met gebroken of negatieve exponent is een ander standaardvoorbeeld van het permanentie-principe. Vermindering van de natuurlijke exponent n met 1 bij a^n $(a > 0)$ komt overeen met deling door a en dit leidt via extrapolatie tot de afspraken:

$a^0 = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a}\ ,\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, enzovoorts. Dit kan goed worden gepresenteerd als het naar links voortzetten van een exponentiële rij met groeifactor a. Dat de rekenwetten die gelden voor natuurlijke exponenten gewoon doorgaan, moet dan nog wel worden onderzocht. Leerzaam is het om te kijken naar: $(a^m)^n = a^{mn}$. Stel $m = -2$ en $n = -3$ en er komt:

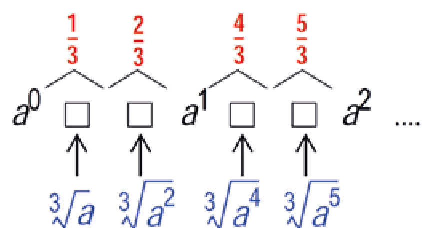
$$(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = a^6 \ .$$

Weer een bevestiging van het 'onvermijdelijke' van de afspraak $(-2) \times (-3) = 6$. Maar nu de gebroken rationale exponenten. Waar de invoering van machten met negatief-gehele exponent een kwestie van *extrapolatie* van een meetkundige rij is, kan aan $a^{1/2}$, $a^{3/2}$, ... betekenis worden gegeven via *interpolatie*. In de rij 1, a, a^2, a^3, a^4, ... is elke term het *meetkundig gemiddelde* van zijn beide buren, terwijl de exponent het *rekenkundig gemiddelde* is van de buurexponenten. Interpolatie met behoud van het exponentieel karakter van de rij geeft het resultaat van figuur 5:



figuur 5

De blauwe getallen zijn de nieuwe tussentermen en de rode getallen worden verklaard tot nieuwe exponenten: $a^{1/2} = \sqrt{a}$, $a^{3/2} = \sqrt{a^3}$. Interpolatie met steeds twee tussentermen gaat ook, zie figuur 6:



figuur 6

De klassieke manier die in schoolboeken werd (wordt) gebruikt is om de permanentie af te kondigen via bij de eigenschappen $(a^m)^n = a^{mn}$ en $a^m \times a^n = a^{m+n}$. In dit verband maakte Henk Hietbrink mij attent op een formule

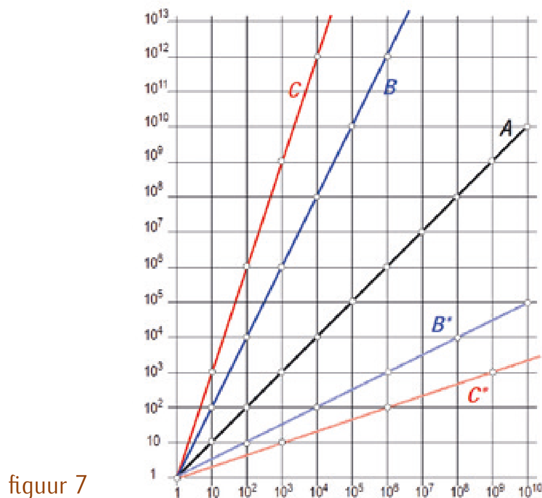
uit een Iraans boek: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$.
Breukexponenten voorzien van een minteken, dienen natuurlijk ook aan bod te komen, en alles komt op zijn pootjes terecht, mits het grondtal positief is. Dit laatste is heel belangrijk, ook voor bijvoorbeeld een exponent als 1/3. Op het eerste gezicht lijkt er bijvoorbeeld

geen bezwaar tegen $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$ maar je komt

dan wel in conflict met $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.
Kortom: grondtallen bij gebroken exponenten zullen per definitie positief zijn.

10-stapsschaalverdeling

Ten behoeve van het experiment *Profi*, werd op het Freudenthal Instituut het pakketje *Evenredigheden en Machten*[3] ontwikkeld. Daar werd met 10-machten een dubbellogaritmisch rooster geïntroduceerd, zie figuur 7:

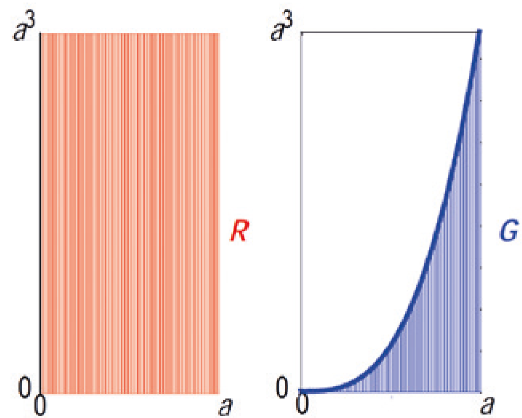


figuur 7

De rechte lijnen *A*, *B* en *C* corresponderen zichtbaar met de vergelijkingen $y = x^1$, $y = x^2$ en $y = x^3$. De exponenten zijn dan juist de hellingsgetallen van de drie lijnen. De spiegelbeelden B^* en C^* van *B* en *C* ten opzichte van *A* corresponderen met $y = \sqrt{x}$ en $y = \sqrt[3]{x}$ en die lijnen hebben de hellingsgetallen 1/2 en 1/3. Dit kan aanleiding zijn voor de afspraak over machten met een gebroken rationale exponent, in de woorden van Freudenthal: *meetkundig-algebraïsche permanentie!* Voor machten met negatieve exponent zijn dalende rechten nodig. De lijn die het punt $(0, 10^6)$ met $(10^6, 0)$ verbindt, correspondeert nu met $xy = 10^6$ ofwel $y = 10^6 \cdot x^{-1}$ en zo verschijnen dan ook negatieve exponenten in beeld. De bedoeling van ons katern was om verbanden, met name uit de biologie, via dubbellogaritmisch papier te onderzoeken - en dat hebben we ook gedaan - maar in de ontwerpfase ontdekten we dat dit ook een mooie manier was om oneigenlijke machten te introduceren. Ik merk nog op dat het rooster gemakkelijk naar links en beneden kan worden uitgebreid als er eenmaal betekenis gegeven is aan machten met negatief-gehele exponent. Verdere verfijning van de schaal kan de vraag oproepen, waar bijvoorbeeld het getal 2 op de assen moet worden gesitueerd. Met andere woorden voor welk getal *p* geldt $10^p = 2$? Nu kan de rekenmachine worden ingeschakeld om via *trial and error* een benadering van *p* te vinden. Een hele scherpe is 0,30103. Mijn GR zegt: $10^{0{,}30103} = 2{,}00000002$. Uiteraard kan dit alles aanleiding zijn tot de introductie van 10-logaritmen.

Wallis wellicht de eerste

John Wallis (1616-1703) was hoogleraar meetkunde in Oxford. Volgens sommige historici was hij de eerste wiskundige die machten met gebroken rationale exponent gebruikte. Ook was hij een van de wegbereiders van de differentiaal- en integraalrekening en zijn werk *Arithmetica Infinitorum* had grote invloed op de jonge Newton. Op het gebied van de berekening van oppervlakten van vlakdelen met kromme grenzen waren in het verleden al belangrijke stappen gezet. Eerst door Archimedes en veel later door Cavalieri (1598-1647). In navolging van de laatste beschouwde Wallis de oppervlakte onder een grafiek als oneindige som van verticale lijnstukken (*ordinaten*). Een oneindig fijne verticale arcering als het ware, zie figuur 8:



figuur 8

Neem als voorbeeld het gebied $0 \times x \times a$ en $0 \times y \times x^3$ (zeg *G*) en vergelijk dit met de omhullende rechthoek *R*. Laat *n* een groot natuurlijk getal zijn. Via de punten op de *x*-as met de *x*-coördinaat achtereenvolgens:

$$0, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a, \ldots\ldots, \frac{n-1}{n}a, a$$ ontstaat een verticale

arcering van de gebieden *G* en *R*. De verhouding van de totale lengte van beide collecties ordinaten geeft een indicatie voor de verhouding van de oppervlakten van *G* en *R*. Als *n* onbeperkt aangroeit, zal de limiet van die verhouding de exacte oppervlakteverhouding als uitkomst hebben. Die verhouding van de arceringen laat zich als volgt uitdrukken in *n*.
Via

$$\frac{0^3 + \left(\frac{1}{n}a\right)^3 + \left(\frac{2}{n}a\right)^3 + \left(\frac{3}{n}a\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}a\right)^3 + a^3}{a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \ldots + a^3 + a^3}$$

komt er na deling door a^3:

$$\frac{0^3 + (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + \ldots\ldots + n^3 + n^3}.$$

Wallis rekende dit uit voor een aantal waarden van *n*:

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

en generaliseerde vervolgens tot:

$$\frac{0^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+\ldots\ldots+(n-1)^3+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots\ldots+n^3+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

Speculatief? Ja, maar het klopt wel! De lezer kan het controleren, bijvoorbeeld via de prikkelende formule: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Wallis concludeerde nu dat de oppervlakte van G een vierde deel van die van R is. In moderne notatie:

$\int_0^a x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}a^4$. Op analoge wijze had hij ook gevonden:

$\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$. Cavalieri had dit alles ook al wel ontdekt, maar via een heel andere techniek, waar ik hier niet verder op inga. De aanpak van Wallis is 'cavaleriaans' in die zin dat hij de oppervlakte als een weefsel van oneindig dunne draden beschouwde, maar zijn berekening met de 'somlimiet' is meer in de geest van Archimedes. Net als Cavalieri extrapoleerde Wallis nu brutaalweg dat in het algemeen zou moeten gelden:

$\int_0^a x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}a^{k+1}$ of met $a = 1$: $\int_0^1 x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$

waarbij $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Spiegeling van de kromme $y = x^k$ in de lijn $y = x$ leert dat de oppervlakte onder de grafiek van op het interval

$[0, 1]$ gelijk zal zijn aan $1-\frac{1}{k-1}=\frac{k}{k+1}=\frac{1}{\frac{1}{k}+1}$.

Dit bracht Wallis dan op het idee om te poneren:

$x^{1/k} = \sqrt[k]{x}$. Een verrassende stap. Dat dit wonderwel strookte met de regels voor het rekenen met machten met natuurlijke exponent, zal hem niet zijn ontgaan. Met in

het achterhoofd $(x^p)^q = x^{pq}$ leidt dit tot $x^{m/k} = \sqrt[k]{x^m}$. En voor wat betreft de 'brutale' formule van Wallis voor de oppervlakte onder de kromme $y = x^k$, later, maar wel vóór de uitvinding van de integraalrekening, werd door andere wiskundigen (zoals Fermat) een overtuigende verklaring gevonden voor die formule.

Permanentie bij differentiëren

De bruikbaarheid van machten met een 'onnatuurlijke' exponent openbaart zich in volle glorie bij het differentiëren van machtsfuncties. De afgeleiden van $x \to 1/x$ en $x \to \sqrt{x}$ kunnen bijvoorbeeld worden gevonden via de identiteiten:

$\dfrac{\frac{1}{x^*}-\frac{1}{x}}{x^*-x}=-\dfrac{1}{x^*x}$ en $\dfrac{\sqrt{x^*}-x}{x^*-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^*}+\sqrt{x}}$ onder de

voorwaarde $x \neq x^*$. Limietovergang ($x^* \to x$) geeft dan:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ofwel

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-1}\right)=-1\cdot x^{-2}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Kortom

de regel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\right)=n\cdot x^{n-1}$ blijft gelden voor

$n = -1$ en $n = ½$. Op verschillende manieren kan worden aangetoond dat de regel van kracht blijft voor *iedere* rationale exponent n. Een afleiding die, mits de kettingregel (of even goed de uitgebreide productregel) bekend is, kan als volgt worden uitgevoerd. Neem eerst het geval n is negatief-geheel, zeg $-m$. Uit $y = x^{-m}$, volgt $y^{-1} = x^m$. Differentiatie van beide leden geeft:

$-1\cdot y^{-2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m\cdot x^{m-1}$. Hieruit volgt (bedenk ook

$y^2 = x^{-2m}$) : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-m\cdot x^{m-1}\cdot y^2=-m\cdot x^{-m-1}$. Nu voor

een willekeurige rationale exponent. Als $y = x^{p/q}$, dan $y^q = x^p$. Hierbij veronderstel ik p en q beide geheel en $q > 0$. Differentiatie van beide leden geeft:

$q\cdot y^{q-1}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot x^{p-1}$. Zodat

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Oneigenlijke machten zijn eigenlijk permanent heel handig!

Noten

[1] Euler, L. (1770), *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Kays. Acad. der Wissenschaften.

[2] Klein, F.(2004), *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint (Arithmetic, Algebra, Analysis)*, Dover Publications.

[3] Goddijn, A., Reuter, W., Kindt, M. (1998). *Evenredigheden en Machten*. Freudenthal Instituut.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

VERSCHENEN

WISKUNDIGEN MOGEN NIET HUILEN



Auteur: Gerardo Soto y Koelemeijer
Uitgever: Uitgeverij Amsterdam University Press (2015)
ISBN: 978-90-8964-906-5
Prijs: € 17,95 (160 pagina's; paperback)
Met introductie van voormalig wiskundemeisje Jeanine Daems.

Persbericht van de uitgever

Hebben baby's al getalbegrip en hoe zouden we daar achter kunnen komen? Wanneer werden de eerste getallen geïntroduceerd? Kunnen we op de *middelbare* school niet zonder wiskunde? En wat is wiskunde eigenlijk?
Wiskundigen mogen niet huilen van romanschrijver en wiskundige Gerardo Soto y Koelemeijer is een wiskundeboek zonder formules, vergelijkingen of bewijzen. In dit boek vol prikkelende verhalen en essays neemt de grootste schaker aller tijden, Bobby Fischer, het op tegen de minstens zo talentvolle wiskundige Alexander Grothendieck. De Britse wiskundige Andrew Wiles, die het vermoeden van Fermat bewees, voert een strijd met voetballer Diego Maradona waarbij de vele parallellen in hun levensverhalen worden uitgelicht.
Wiskundigen mogen niet huilen is een verrukkelijke verzameling essays over wiskunde, geschreven met een filosofische blik.

Gerardo Soto y Koelemeijer (1975) studeerde literatuurwetenschap en promoveerde in de wiskunde. Hij heeft een propedeuse Talen en Culturen van Latijns-Amerika, filosofie en politicologie. Hij schreef twee romans, *Armelia* (2006) en *De gestolen kinderen* (2013). Momenteel is hij docent wiskunde op een middelbare school.

GECIJFERDHEID

Kees Hoogland

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Deze keer: sommige getallen roepen direct associaties op.



365,24219265

Je ziet een getal en onverbiddelijk dringt zich een associatie op. Ik denk dat heel veel wiskundedocenten bij het zien van bovenstaand getal een eensluidende gedachte hebben: schrikkeljaar. Het is één van de essenties van gecijferdheid: welke rol spelen getallen in onze samenleving, in ons leven? Welke betekenis hebben getallen en welke betekenis geven wij er aan?
Zouden leerlingen deze associatie ook hebben? Als u het in de klas wilt uitproberen dan hoor ik graag uw ervaringen. Bij voorkeur uit te voeren op woensdag 24 februari. Want wist u dat er oorspronkelijk zo'n extra dag werd ingevoegd na 23 februari, zodat eigenlijk in een schrikkeljaar 24 februari schrikkeldag moet heten? Sint Matthijs heeft er op zijn oorspronkelijke naamdag nog steeds last van.



Sint Matthijs. Naamdag 24 februari of in schrikkeljaren 25 februari.

Rekenen en taal

Bij rekenen en wiskunde bestaat vaak de neiging om alles heel precies en eenduidig te definiëren en af te spreken: laten we afspreken dat we dat voortaan zó noemen, zó noteren en zó uitrekenen. Bij gecijferdheid daarentegen wil je leerlingen leren om te gaan met de grote diversiteit waarin kwantitatieve zaken kunnen worden gerepresenteerd, en daar kritisch naar te kijken. Daarbij hoort ook het leren en waarderen dat verschillende mensen, verschillende culturen en verschillende systemen de zaken op een andere manier kunnen voorstellen, maar dat de onderliggende begrippen en concepten hetzelfde zijn.
Voor taal ligt dat anders dan bij rekenen. Wij vinden het heel gewoon dat verschillende groepen mensen voor hetzelfde concept heel verschillende woorden gebruiken: schaltjahr, leap year, schrikkeljaar, skudår en skottår. Deze woorden hebben allemaal te maken met schakelen, verspringen (in Oudnederlands: schrikken), en verschieten. Maar er is ook: *bissextile year, année bissextile, anno bisestile, año bisiesto*.
Ons gecijferdheid-associatievermogen draait direct op volle toeren: twee zesde of tweede van de zesde of tweede zesde? Het blijkt terug te voeren op een ingevoegde tweede zesde dag vóór 1 maart. In de Romeinse kalender werden de dagen tot 1 maart afgeteld vanaf midden februari en in een schrikkeljaar ging dat dus zo: ..., 8, 7, 6, 6*, 5, 4, 3, 2, 1.

Rekenen aan gecijferdheid

Terug naar 365,24219265. Door die betekenisvolle associaties dringt het rekenwerk zich bijna als vanzelf op. Een voor de hand liggende vraag aan leerlingen is: 'Hoe zou jij deze lengte van het tropisch jaar verwerken in een reeks van jaren, die nu eenmaal bestaan uit een geheel aantal dagen?' Daarbij is natuurlijk vooral het kleine verschil met 365,25 het meest interessant om aan te rekenen. Voor leerlingen uit hogere klassen zou het uitdagend kunnen zijn eens na te rekenen hoe andere culturen met andere kalenders dit zelfde probleem oplossen. Bijvoorbeeld in de Iraanse kalender. Die werkt met een 33-jarige cyclus waar in jaar 5 een extra dag wordt toegevoegd en vervolgens na elke vier jaar. Hoe ver kom je daarmee? Heel soms wordt die cyclus 29 jaar. Hoe vaak moet dat om heel precies op gemiddeld de goede jaarlengte te komen?

Over de auteur

Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid bij SLO. Website: *www.gecijferdheid.nl*,
E-mailadres: *cph@xs4all.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

LADDERZAT

Een kunstwerk dat Jacques Jansen tijdens zijn vakantie zag inspireerde hem om op zoek te gaan naar wiskundige ladderproblemen. Veel problemen waarin een lijnstuk met al dan niet bekende lengte voorkomt, kunnen als een ladderprobleem opgevat worden.

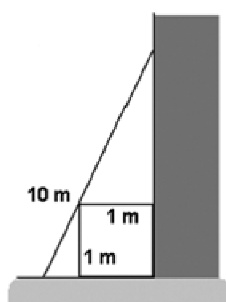
Afgelopen zomervakantie kampeerden we in de buurt van Lac de Vassivière in Zuid-Frankrijk. Er ligt in dat meer een mooi eiland waar veel beeldende kunst te zien is. Zo ook de auto met ladder van figuur 1. Ik had niet gedacht dat ik een paar weken later van het ene ladderprobleem op het andere kwam. Henk Hietbrink schreef in 2008 al een artikel over een ladderprobleem: *Gewoon een ladder tegen een muur*[1], zie figuur 2. Nou gewoon? Er was wel een obstakel. U ziet in de uitwerkingen van Joost en Lia, zie figuur 3, een vergelijking verschijnen die na het wegwerken van de haakjes een mooie wederkerige vergelijking oplevert: $b^4 + 2b^3 - 98b^2 + 2b + 1 = 0$. Wederkerig? De coëfficiënten van de vijfterm in het linkerlid van de vergelijking vormen een symmetrisch rijtje van vijf getallen: 1 – 2 – 98 – 2 - 1. Henk schrijft dat een dergelijke vergelijking een prettige eigenschap heeft. Je kunt met een geschikte substitutie de vergelijking vervangen door een kwadratische vergelijking.

Kies voor de substitutie: $p = b + \dfrac{1}{b}$. U krijgt dan:

$p^2 + 2p = 100$. En dat kunt u verder oplossen.

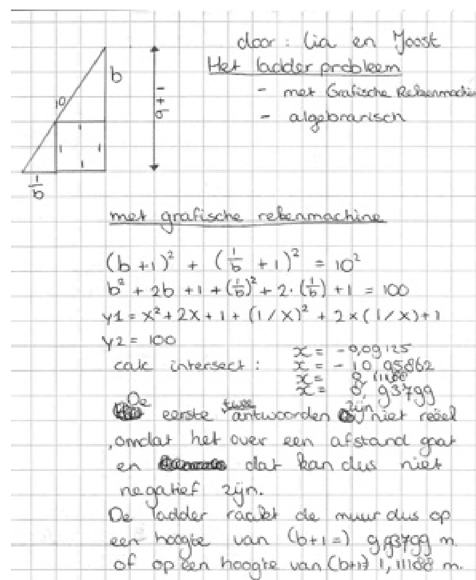


figuur 1



Een schilder zet een ladder van tien meter tegen een hoog huis. Voor het huis staat een berging van 1 meter breed en 1 meter hoog. De ladder staat op de grond, raakt de berging en staat tegen het huis. Vraag is hoe hoog de ladder tegen het huis staat en hoe ver de ladder van het huis staat.

figuur 2



figuur 3

Wat is een ladderprobleem?

Natuurlijk een probleem waar een of zelfs meerdere ladders in voorkomen. Bij meerdere ladders moet u denken aan gekruiste ladders. Dat probleem werd ooit besproken in *Euclides* door W.H.V. de Goede in het artikel *De kruisende ladders in de steeg*.[2] Dat gaan we nu niet doen. Wij beperken ons tot één ladder.

In figuur 4 zien we mannen aan het werk die dakpannen aan het vernieuwen zijn. De lengte van de ladder en de afstand van de onderkant van de ladder tot de geprojecteerde noklijn van het huis zijn afmetingen die we snel kunnen vinden. Leerlingen kunnen dan de hoogte van het huis berekenen nadat ze - lijkt me zinvol - eerst schattingen gemaakt hebben. Wij bekijken nu problemen met een obstakel. In het eerste probleem was de lengte van de ladder gegeven, maar deze kan ook onbekend zijn.

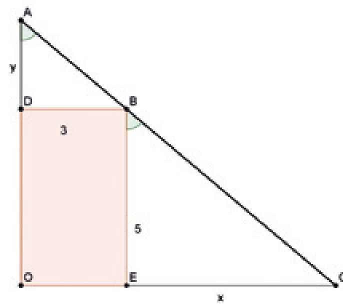
Het ladderprobleem van Bas

Een vriend van mij hielp een leerling, Bas genaamd. Bas zat met een probleem:

Een ladder leunt tegen een omheining van 5 m hoog en raakt op 3 m achter de omheining een muur. Gevraagd wordt de exacte *minimale* lengte l van de ladder.



figuur 4



figuur 5

Mijn vriend hielp hem met een gelabelde situatieschets, zie figuur 5. Ik koos zelf dynamische meetkunde als gereedschap. Dan ga je in gedachten al snel draaien met een latje en kom je op het idee van een draaihoek. Letters plaatsen bij hoekpunten en gebruik maken van een F-figuur. Lijnstuk *AC* noemen we lengte *l*, *en* die hangt af van draaihoek α:

$$l = AB + BC = \frac{3}{\sin(\alpha)} + \frac{5}{\cos(\alpha)} \text{ waarbij}$$

$\angle DAB = \angle EBC = \alpha$. Dan gaan we minimaliseren en

vinden: $l' = \dfrac{-3\cdot\cos^3(\alpha) + 5\cdot\sin^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)}$. $l'(\alpha) = 0$

oplossen geeft $\tan(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. Met de GR kunnen we

natuurlijk een benadering vinden voor α en voor de minimale lengte van de ladder maar we hadden een hoger doel: een exacte oplossing. We moeten dan een uitdrukking vinden voor cos(α) en sin(α). Dat is ook voor een 6 vwo leerling een lastige actie maar u als docent kunt hem of haar een duwtje geven in de goede richting. We zoeken

uitdrukkingen voor $\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$ en $\dfrac{1}{\sin(\alpha)}$. De leerling kent

de regel $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Als we alle termen door

$\cos^2(\alpha)$ delen dan geeft dat : $\tan^2(\alpha) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

En delen door $\sin^2(\alpha)$ geeft: $1 + \dfrac{1}{\tan^2(\alpha)} = \dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}$.

Zo vinden we voor $\dfrac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{25}} + 1}$ en

$\dfrac{1}{\sin(\alpha)} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{25}}}}$.

Tot slot vinden we voor de minimale lengte van de ladder:

$$l = 3\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{25}}}} + 5\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{25}} + 1} \approx 11{,}19 \text{ meter.}$$

Zonder draaihoek maar met variabele *x*

Uit gelijkvormigheid van de driehoeken *DBA* en *ECB* vinden we $y = \dfrac{15}{x}$. Met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we $l^2 = (\frac{15}{x} + 5)^2 + (x + 3)^2$. En dat is te minimaliseren door $2\cdot(\frac{15}{x} + 5)(\frac{-15}{x^2}) + 2(x + 3) = 0$ op te lossen.

Merk op dat $(\frac{15}{x} + 5)$ de lengte is van de afstand tussen de bovenkant van de ladder en de grond, een van de rechthoekzijden dus van figuur 5.

Stel $p = \frac{15}{x} + 5$. Dan wordt de vergelijking getransformeerd

tot: $p\cdot\left(\dfrac{-15}{\frac{15^2}{(p-5)^2}}\right) + \dfrac{3p}{p-5} = 0$.

Dat is weer te herleiden tot: $45 = (p - 5)^3$. En dat levert

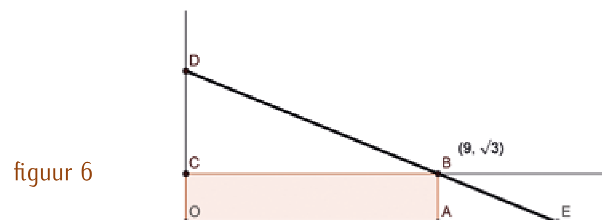
op: $p = 5 + \sqrt[3]{45}$ en $x = \dfrac{15}{\sqrt[3]{45}}$.

$l^2 = (5 + \sqrt[3]{45})^2 + (\frac{15}{\sqrt[3]{45}} + 3)^2$. $l \approx 11{,}194$.

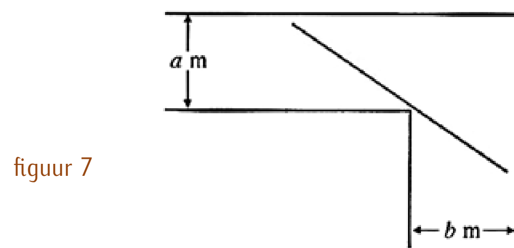
Dergelijke problemen komen we ook tegen in het boek *Calculus* van Robert A. Adams. Op pagina 265, 8e editie staan de volgende twee opgaven:

25. What is the length of the shortest line segment having one end on the *x*-axis, the other end on the *y*-axis, and passing through the point (9, √3)?

figuur 6



figuur 7

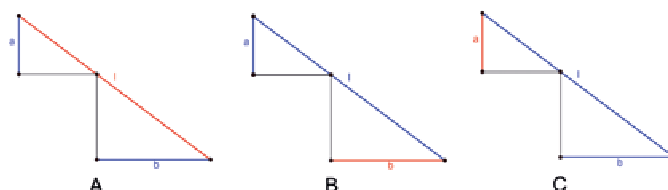


Maakt u een tekening dan herkent u onmiddellijk een laddervariant, zie figuur 6.

Het gaat dus steeds om twee gelijkvormige driehoeken met een gemeenschappelijk hoekpunt en waarvan de schuine zijden een en dezelfde drager hebben. Zo ook in het volgend problem, zie figuur 7.

26. (Getting around a corner) Find the length of the longest beam that can be carried horizontally around the corner from a hallway of width *a* m to a hallway of width *b* m. (Assume the beam has no width)

Studenten van Technische Bedrijfskunde van de TU/e kregen in oktober 2015 in een cursus calculus opdracht 26 als huiswerk. De cursus calculus is bedoeld om aansluitingsproblemen tussen voortgezet onderwijs en TU te verminderen. De analyse uit 5 en 6 vwo wordt in tien weken herhaald en ook nog wat uitgediept. In een volgend artikel daar meer over. Bijna niemand was in staat om ook maar een begin te maken met opgave 26. Dat zal over twee jaar wel anders zijn. Want de opdracht van de Wiskunde B-dag van 13 november 2015 was *Aan de Gang* De kernvraag was: kunnen bepaalde objecten door een 1 meter brede gang met een rechte hoek er in verplaatst worden. Een van de problemen voor de studenten was om in te zien dat de lengte van een lijnstuk juist geminimaliseerd moest worden. In het bovenaanzicht in figuur 7 zien we dat het schuine lijnstukje niet doorgetrokken is tot de gangwanden. Vanuit figuur 7 bekeken kunnen we het lijnstukje met variabele lengte draaien zodat $\alpha = 90^\circ$, maar ook zo dat $\alpha = 0^\circ$. In beide gevallen zal de lengte oneindig groot worden. Voor een bepaalde waarde van α moet er wel een kleinste lengte zijn. Opgave 26 is in wezen een generalisatie van het ladderprobleem van



figuur 8

Bas. In het kader kunt u de uitwerkingen van 25 en 26 met elkaar vergelijken. We kunnen de optimaliseringsproblemen terug brengen tot drie plaatjes. Het gaat om de lengtes van drie lijnstukken. Zie figuur 8. Het rood gekleurde lijnstuk moet steeds geminimaliseerd worden. De lengten van de blauw gekleurde lijnstukjes zijn gegeven. Het balkprobleem kunnen we koppelen aan schets A.
We kunnen ook een rechtshoekzijde minimaliseren zoals te zien is in de schetsen B en C. Dit gebeurt bijvoorbeeld bij het volgende torenprobleem uit een Duits boek:

Ladder in de toren

Hoe hoog moet een poort met hoogte a in een toren met breedte b minstens zijn zodat een ladder met lengte l door de poort naar binnen kan? Zie figuur 9

Kader

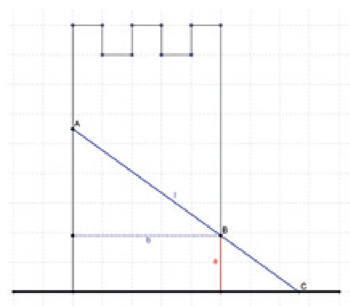
	Uitwerking lijnstuk (25)	Uitwerking balk (26)
1	$l = 9 \cdot (\frac{1}{\cos(\alpha)}) + \sqrt{3} \cdot (\frac{1}{\sin(\alpha)})$	$l = a \cdot (\frac{1}{\cos(\alpha)}) + b \cdot (\frac{1}{\sin(\alpha)})$
2	$l'(\alpha) = \frac{9 \cdot \sin^3(\alpha) - \sqrt{3} \cdot \cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}$	$l'(\alpha) = \frac{a \cdot \sin^3(\alpha) - b \cdot \cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}$
3	$l'(\alpha) = 0$ geeft $\tan^3(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{9}$.	$l'(\alpha) = 0$ geeft $\tan^3(\alpha) = \frac{b}{a}$
4	$\alpha = \frac{1}{6}\pi$	α uitrekenen met behulp van $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
5	$l = 9 \cdot (\frac{1}{\cos(\frac{1}{6}\pi)}) + \sqrt{3} \cdot (\frac{1}{\sin(\frac{1}{6}\pi)}) = 8\sqrt{3}$	Delen door $\cos^2(\alpha)$ geeft $\tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ Delen door $\sin^2(\alpha)$ geeft $1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$
6		$\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{((\frac{b}{a})^{\frac{2}{3}} + 1)}$ en $\frac{1}{\sin(\alpha)} = \sqrt{1 + \frac{1}{(\frac{b}{a})^{\frac{2}{3}}}}$
7	Controle!	$l = a \cdot \sqrt{(\frac{b}{a})^{\frac{2}{3}} + 1} + b \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(\frac{b}{a})^{\frac{2}{3}}}}$
8	$l = (9^{\frac{2}{3}} + \sqrt{3}^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = (4 \cdot 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{3}$	$l = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

We moeten dus de minimale hoogte a van de poort vinden. Neem $b = 4{,}8$ m en $l = 6{,}4$ m. Dan zult u ontdekken dat de poort minstens 47 cm hoog moet zijn. Had u dat verwacht? U kunt nagaan dat we, als we voor b en l geen waarden invullen, en lengte a minimaliseren, vinden:

$$a_{\text{min}} = (l^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Tot slot

Ladderzat? De volgende anekdote wil ik u niet onthouden. De Poolse wiskundige Stanislav Ulam verhuisde ooit van Los Alamos naar een appartement in New York. Een sofa moest door een gang met een rechte hoek. Ulam ging zitten rekenen en kwam tot de conclusie dat het niet zou gaan en ging naar zijn werk. Toen hij 's avonds thuis kwam hadden zijn vrouw en de buurman het probleem alsnog geklaard. Leuk verhaal, maar of het waar is?



figuur 9

Noten en bron

[1] Hietbrink, H. (2008). Gewoon een ladder tegen de muur. *Nieuwe Wiskrant*, *27*(4)
[2] De Goede, W.H.V. (1993). De kruisende ladders in de steeg. *Euclides*, *68*(8)
Oud docent Matthijs Wielders

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

CONTEXTOPGAVEN – DEEL 3

In de vorige twee nummers beschreef ik twee methoden die je kunt gebruiken als leerlingen problemen hebben met contextopgaven. Dit is het laatste artikel over contextopgaven met daarin nog twee methoden. Ik gebruik hetzelfde voorbeeld als in deel 2. Procentenopgave passend bij een hoofdstuk over procenten, wiskunde onderbouw havo/vwo:

Bij een zorgverzekeraar moet een volwassene in 2016 € 98,25 per maand aan premie betalen. Dit is een stijging van € 27,60 per jaar ten opzichte van 2015. Met hoeveel procent is de premie in 2016 ten opzichte van 2015 gestegen? Rond je antwoord af op één decimaal.

De eerste methode heet vragen stellen. Na elk gegeven in de tekst, vragen leerlingen zichzelf af welke vragen ze nu kunnen beantwoorden. Toegepast op de bovenstaande geeft dit het volgende:
Bij een zorgverzekeraar moet een volwassene in 2016 € 98,25 aan premie per maand betalen.
- wat weet ik nu? [de premie per maand in 2016]
- wat kan ik nu uitrekenen? [de premie per jaar of per dag dus in een andere tijdseenheid]
- welke vraag kan ik nu beantwoorden? [bijvoorbeeld hoeveel de jaarpremie is]

Vervolgens doen de leerlingen ditzelfde bij de volgende zin uit de opgave. Het voordeel van deze methode is dat leerlingen meer studerend gaan lezen.

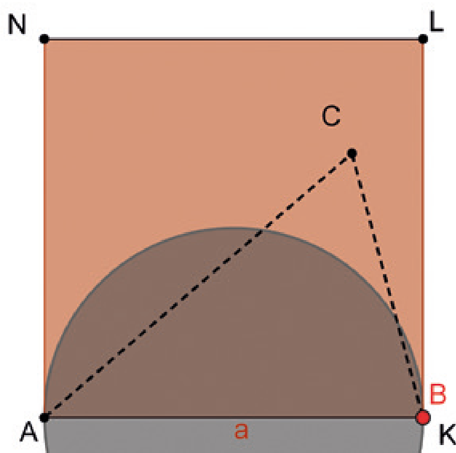
De tweede methode heb ik geleerd van mijn natuurkunde collega Maarten Visser: GGFUA. Dit betekent: gegeven, gevraagd, formule, uitwerking, antwoord. Leerlingen schrijven deze woorden onder elkaar en achter de woorden welke informatie uit de opgave erbij hoort. Door dit consequent bij elke opgave toe te passen, leren leerlingen om de teksten bij exacte vakken te analyseren.
Toegepast op de procentopgave:
Gegeven: Premie 2016 = € 98,25 per **maand**; Stijging premie ten opzichte van 2015 = € 27,60 per **jaar**
Gevraagd: Premiestijging in procenten ten opzichte van 2015
Formule: $\textit{stijging} = \dfrac{27,60}{\textit{jaarpremie}\ 2015} \cdot 100\,\%$
En om de jaarpremie 2015 te berekenen:
jaarpremie 2016 = *maandpremie* 2016 □ 12
jaarpremie 2015 = *jaarpremie* 2016 – € 27,60
Uitkomst: 2,397...; Antwoord: 2,397... ≈ 2,4%
Uiteraard zijn er nog minstens twee andere manieren om dit te berekenen, bijvoorbeeld via de maandpremie en via ((nieuw – oud) : oud) × 100%. Bij 'formule' komen dan andere formules te staan. Dat is een leuke aanleiding voor een klassikale discussie.

Lonneke Boels

STOKJESDRIEHOEK HAD AANDACHT VAN LEWIS CAROLL

Fred Muijrers

Op allerlei manieren kun je *random* driehoeken laten ontstaan. Bijvoorbeeld door een gegeven lengte in drie stukken te knippen. Of door *random* ergens drie punten te tekenen. Fred Muijrers schreef erover, dat inspireerde een collega en die inspireerde Fred weer tot het schrijven van een vervolg.



figuur 1

In *Euclides* nummer 1 jaargang 91 schreef ik over de mogelijkheid om met drie lengtes, ontstaan door *ad random* een stok (van 1 m) in drie stukken te delen, een driehoek te maken.[1] Stukken a, b en $c = 1 - a - b$ ontstaan maar in het bijbehorend plaatje ontbrak de intekening van de natuurlijke voorwaarde: $a + b < 1$. Als dat wel is gedaan, is meteen in te zien wat de gevraagde kans is: 0,25. Het verhaal begon met een plaatje van een 'stok' in drie stukken gedeeld. Ere wie ere toekomt: dat was een mooie foto van Tom Goris na zijn aanpak met een *ad random* geknipt rietje. Van een collega kreeg ik het boek *The art of probability* van R.W. Hamming onder ogen met nog meer van deze interessante verbindingen tussen kans en meetkunde.[2] Geïnspireerd door dat boek ontstond een ander voorbeeld.

In een vierkante kamer staan twee personen A en B in twee aangrenzende hoeken. Een persoon C komt binnen en gaat 'ergens' staan zonder op A en B te letten. Wat is de kans dat driehoek ABC scherphoekig is?

Met behulp van de Stelling van Thales is in figuur 1 te zien dat er een scherphoekige driehoek ontstaat als C niet op of binnen de halve cirkel staat. Met een eenvoudige oppervlakteberekening is de kans te vinden: $1 - \pi/8$.

Willekeurig gekozen punten in het vlak

Volgens Hamming hield zelfs Lewis Carroll zich bezig met dit probleem, maar wel met een lastigere variant: laat de plaatsen van A, B en C willekeurig gekozen zijn in het vlak. Wat is de kans dat driehoek ABC scherphoekig is? Hierna volgen aanpakken die Hamming beschrijft. Het lijkt de algemeenheid niet te schaden indien we de zijden a, b en c noemen met $c \leq b \leq a$.

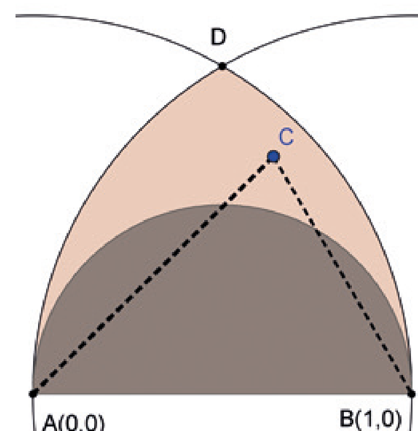
Aanpak 1:
Kies de langste zijde (a) op interval [0,1]. Onderzoek waar het derde hoekpunt mag liggen opdat een scherphoekige driehoek ontstaat. We tekenen de situatie boven de x-as, zie figuur 2.

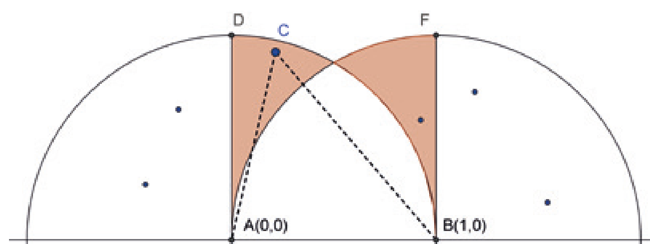
Dat punt mag nu binnen *beide* grote cirkelbogen liggen of erop ($b \leq a$ én $c \leq a$). Het gebied heeft oppervlakte:

$$O_1 = 2\int_{0,5}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad .$$

Om een scherphoekige driehoek te krijgen mag het punt niet binnen of op de kleine halve cirkel liggen. De oppervlakte daarvan: $O_2 = \pi/8$. De kans op een scherphoekige driehoek is nu te berekenen: $(O_1 - O_2)/O_1 = 0{,}360...$

figuur 2





figuur 3

Aanpak 2:
Kies de op een na langste zijde (b) op interval [0,1]. Dezelfde benadering als bij aanpak 1 geeft voor het derde hoekpunt het gebied waar in figuur 3 voorbeeldpunten liggen.

Dat punt mag *niet* binnen *beide* halve cirkels liggen ($a \geq b$) maar ook niet daarbuiten ($c \leq b$). Het gebied heeft oppervlakte:

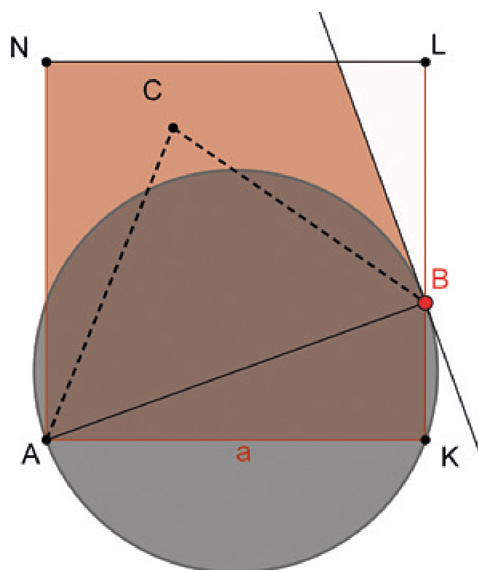
$$O_3 = 2\left(\frac{\pi}{4} + \int_0^{0,5} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(1-x)^2}\right) dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Om een scherphoekige driehoek te krijgen mag het hoekpunt in het gekleurde gebied liggen. De oppervlakte daarvan: $O_4 = O_3 - \pi/2$. De kans op een scherphoekige driehoek is hiermee te berekenen: $O_4/O_3 = 0{,}178...$

Aanpak 3:
De lezer mag het zeggen. De resultaten van aanpak 1 en aanpak 2 zijn duidelijk strijdig. Hier is oneindigheid in het spel: waar ligt een willekeurig punt in het vlak en hoe bepaal je dat? Lastig.

figuur 4



Driehoek in een vierkant

Een variant op mijn kansprobleem in die vierkante kamer: A blijft waar hij is, B kiest een willekeurige positie aan de muur waar hij eerst stond, tegenover A. C gaat weer vervolgens 'ergens' staan. Wat is de kans dat driehoek ABC scherphoekig is?
De cirkel in figuur 4 is bepalend. Als C buiten die cirkel staat en links van de raaklijn in B, dan ontstaat er een scherphoekige driehoek. De oppervlakte van het gebied buiten de cirkel willen we daarom weten. De y-waarde van positie B is een getal q uit [0,1]. Zolang $q < 0{,}75$ is de afleiding niet echt moeilijk.
Gevraagde oppervlakte = 1 - *Opp. cirkel deel binnen vierkant* – *Opp. witte driehoek*. Met $\tan(\angle BAN) = 1 / q$ dus $\angle BAN = \arctan(1/q)$ en $q < 0{,}75$ krijgen we:

$$O_q = 1 - \left(\frac{3}{4}q + \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{q}\right)\left(1+q^2\right)\right) - \frac{1}{2}q(1-q)^2$$

Voor andere q-waarden is het wat gecompliceerder.
Een controle voor q nadert 0, dus B in de hoek: $O(0) = 1 - \pi/8$. Dit resultaat hadden we al gevonden. Overigens: omdat het vierkant oppervlakte 1 heeft, is bovengenoemde waarde $O(q)$ ook meteen de kans op een scherphoekige driehoek, gegeven dat B in punt $(1,q)$ staat. Er zijn vele varianten op dit thema: de kamer is rechthoekig, B staat ergens in de kamer, de kamer is cirkelvormig met A in het midden en B wel/niet aan de rand, et cetera. Boeiende en inspirerende stof voor leerlingen en leraren, die uitgedaagd willen worden. Opmerkingen, aanvullingen of vragen ook met betrekking tot *GeoGebra* zijn welkom.

Noten

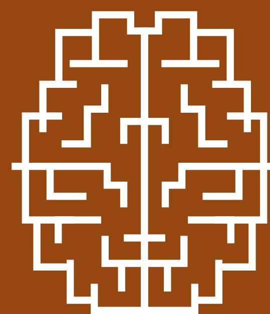
[1] Muijrers, F. (2015). Stokjesdriehoek. *Euclides, 91*(1), 40
[2] Hamming, R.W. (1991). *The art of probability*. Westview Press.

Over de auteur

Fred Muijrers is docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Tevens is hij coördinator van de eerstegraadsopleiding tot leraar wiskunde van de HAN masterprogramma's.
E-mailadres: fred.muijrers@han.nl

PUZZEL 91-4

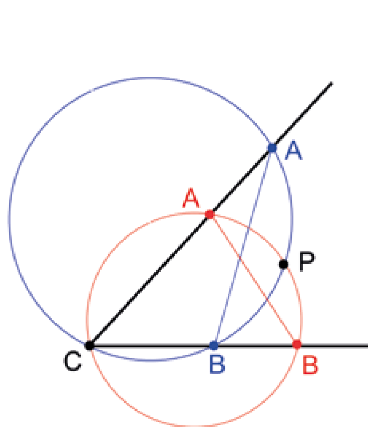
KORTSTE WEG VAN A NAAR B



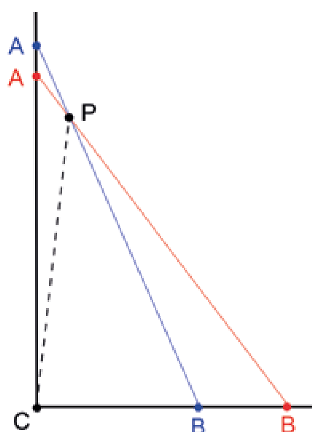
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In deze puzzel bepalen we een driehoek *ABC* met gegeven hoek *C*, waarbij *AB* zo kort mogelijk is. Daarbij zijn er natuurlijk nog andere voorwaarden waar de driehoek aan moet voldoen.

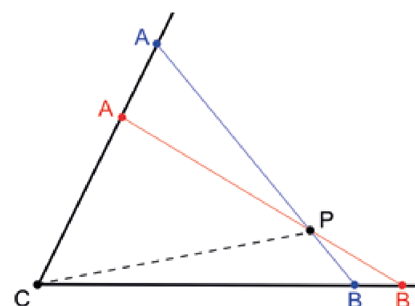
Opgave 1 – Van driehoek *ABC* is gegeven een scherpe hoek *C*, met een punt *P* binnen die hoek.
Gevraagd: construeer met passer en lat driehoek *ABC*, waarbij *P* op de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* ligt, met *AB* zo kort mogelijk. U mag zelf de hoek *C* en de plaats van *P* kiezen, maar uw constructie moet natuurlijk ook toepasbaar zijn bij andere keuzen. De constructie kunt u tekenen of beschrijven. Het is daarbij niet nodig om uit te leggen hoe u standaardconstructies, zoals bijvoorbeeld evenwijdige of loodrechte lijnen, uitvoert. In figuur 1 staat een voorbeeld, waarin twee mogelijkheden zijn getekend, rood en blauw, maar de kortste *AB* moet nog worden gevonden.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

In de volgende opgaven moet *P* op de nog te bepalen zijde *AB* liggen. Ons probleem is dus: van driehoek *ABC* is alleen hoek *C* gegeven en een punt *P* binnen die hoek. Wat is dan het kortste lijnstuk *AB* door *P*? Voorbeelden met weer twee getekende mogelijkheden, die niet per se de kortste *AB* weergeven ziet u in de figuren 2 en 3. Voor een hoek *C* van 90° is dit misschien een bekend probleem, maar we vragen wel naar de exacte oplossing. In tegenstelling tot opgave 1 moet er nu worden gerekend, want, zoals uit de oplossing zal blijken, is een constructie met passer en lat niet mogelijk.
Zoals dat vroeger was, voor de tijd van de (grafische) rekenmachines op school, zijn de antwoorden steeds redelijk mooie getallen. Je wist toen dat als dat niet zo was, dan had je iets fout gedaan. Dat geldt hier ook.

Opgave 2a – Gegeven is dat hoek *C* is 90° en $\tan(\angle BCP) = 8$. Bepaal de hoek (tangens) van hoek *B*, zodat *P* op *AB* ligt en *AB* zo kort mogelijk is.

Opgave 2b – Idem, maar nu meer algemeen. Kies daarvoor $\tan(\angle BCP) = p$, wel met hoek *C* is 90°.
Bij het opstellen van deze puzzel kwamen we tot een verrassend mooie stelling. Voor ons althans onbekend.

Stelling: Als in driehoek *ABC* hoek *C* en een punt *P* op *AB* gegeven zijn, en er geldt dat *AB* zo kort mogelijk is, dan gaat de middelloodlijn van *AB* door het midden van *CP*. Of, wat op hetzelfde neerkomt: Als *AB* zo kort mogelijk is, dan geldt dat $BH = AP$ (of $AH = BP$), waarbij *H* het voetpunt is van de loodlijn uit *C* op *AB*.

Opgave 3 – Toon aan dat dit klopt bij opgave 2a en 2b.

Deze stelling geldt ook als hoek *C* niet recht is, maar het bewijs geven we pas bij de uitwerking van deze puzzel. Wie weet vindt u het leuk dit zelf te bewijzen. U mag de stelling gebruiken bij het oplossen van de volgende opgaven. Bij opgaven 1 tot en met 3 was dat niet de bedoeling, tenzij u de stelling heeft bewezen.

Opgave 4 – Bepaal de hoek *B* (tangens, sinus, cosinus of graden) als gegeven is: $\tan(\angle C) = 2$ en $\tan(\angle BCP) = 1/5$. Het is goed mogelijk de oplossing te vinden door het te tekenen op ruitjespapier en vervolgens met een berekening te controleren.

Met de gegeven stelling is het mogelijk om van een gegeven driehoek *ABC* te bepalen waar het punt *P* op *AB* moet liggen, zodat *AB* minimaal is.

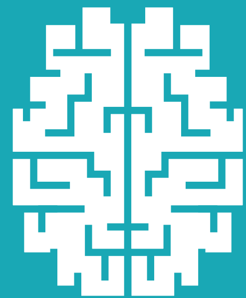
Opgave 5 – Bedenk hiervan zelf een voorbeeld waarbij driehoek *ABC* gelijkbenig is ($AB = AC$) en *A*, *B*, *C* en *P* zijn roosterpunten. U heeft daarmee een opgave geconstrueerd van dezelfde soort als opgave 4, waarbij nu de oplossing een gelijkbenige driehoek blijkt te zijn.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 1 maart 2016 binnen zijn.

UITWERKING PUZZEL 91-2

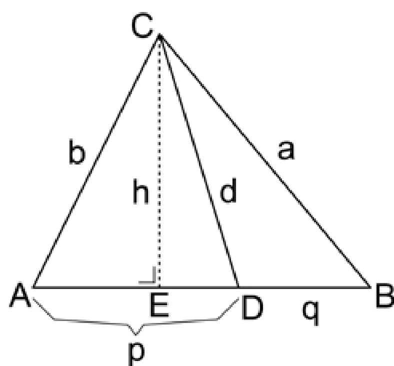
SPELEN MET HELEN



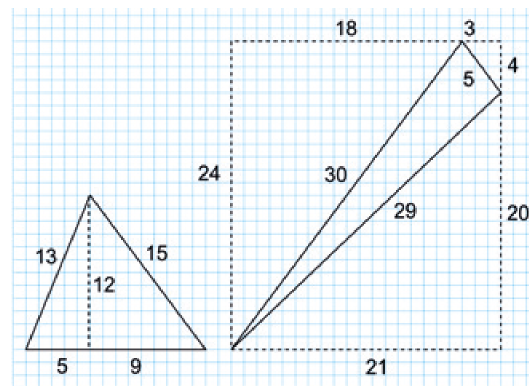
Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Naar een idee van J. Meerhof moest u in deze puzzel methoden onderzoeken om zelf plaatjes van driehoeken *ABC* te maken, waarbij de zijden *a*, *b*, *c* en een transversaal *CD* = *d* (*D* op *AB*) en de stukjes *AD* = *p* en *BD* = *q* allen een rationale lengte hebben. Zie figuur 1. Door geschikte vergroting kunnen we er dan allemaal gehele getallen van maken. Wellicht handig bij het maken van opgaven voor een proefwerk. En dat bleek over het algemeen goed te lukken.

Opgave 1 geeft een methode waarbij geldt: hoek *ACD* = hoek *B*. Als niet te moeilijke instap vroegen we om te bewijzen dat in dat geval als *a*, *b* en *c* rationaal zijn, dan zijn ook *d*, *p* en *q* rationaal. Dit kon bewezen worden door gelijkvormigheid van driehoek *ABC* met driehoek *ACD* (*hh*), $d/b = a/c$, dus $d = ab/c$. Ook: $b/p = c/b$, dus $p = b^2/c$ en $q = c - p$. Met *a*, *b* en *c* rationaal zijn *d*, *p* en *q* dat ook. *QED*



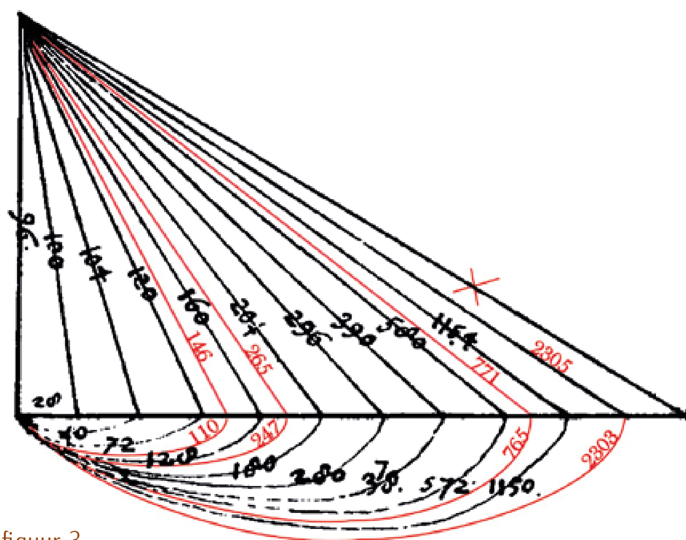
figuur 1



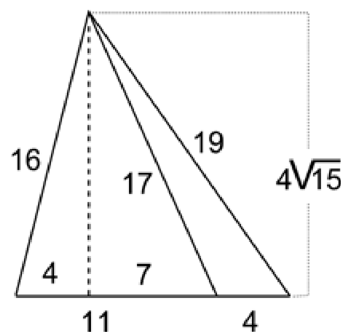
figuur 2

Bij **opgave 2** moest u driehoeken *ABC* met gehele zijden op ons bekende ruitjespapier plaatsen, zo dat de hoekpunten op roosterpunten liggen. Dit kan alleen als driehoek *ABC* ook een gehele oppervlakte heeft, en dus een Herondriehoek is. We zien dat door de oppervlakte van driehoek *ABC* (met *A*, *B* en *C* op roosterpunten) te berekenen als het verschil tussen een geheeltallige rechthoek en een aantal rechthoekige driehoeken (= lijstjesmethode). Omdat de zijden van *ABC* geheel zijn, zijn dat Pythagorasdriehoeken, met gehele oppervlakte (minstens één rechthoekszijde even). De oppervlakte van driehoek *ABC* is dus ook geheel. We kozen driehoeken met zijden 13, 14, 15 en ook 5, 29, 30. Dat die oppervlaktes geheel zijn is te controleren met de formule van Heron: Oppervlakte = $\sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$, met *s* = halve omtrek driehoek. Om te onderzoeken hoe we die driehoeken op het roosterpapier kunnen plaatsen is het handig om een rijtje te maken van alle gehele Pythagorastripletten met getallen kleiner of gelijk aan 15, respectievelijk kleiner of gelijk aan 30. Bijvoorbeeld met $2mn$, $m^2 - n^2$ en $m^2 + n^2$. Voor het eerste voorbeeld geeft dat de tripletten (3,4,5), (6,8,10), (9,12,15), (5,12,13) en voor het tweede voorbeeld ook nog (12,16,20), (15,20,25), (18,24,30), (8,16,17), (10,24,26) en (20,21,29). In het eerste geval herkennen we alleen 13 en 15 als mogelijke zijden. De zijde 14 zal dus de som moeten zijn van 5 + 9. Voor het tweede voorbeeld herkennen we alle drie de lengtes 5, 29 en 30. Merk op dat 18 + 3 = 21 en 20 + 4 = 24. Daarmee lukt het. Zie figuur 2.

Opgave 3 was een analyse van een oud plaatje (figuur 3), afkomstig uit de aantekeningen van niemand minder dan Frans van Schooten jr. (1615-1660).[1] We zien elf geheeltallige rechthoekige driehoeken, elk met hoogte 96. Hij beschrijft hoe je met drie van die driehoeken, de geheeltallige driehoeken kan maken waar wij naar op zoek zijn. Deze hebben dan ook een geheeltallige hoogtelijn. Van de twee grootste van zijn driehoeken waren de maten niet gegeven. De vraag was of hij alle mogelijkheden had getekend en of het plaatje klopt. Hoewel u dit ook kunt oplossen met behulp van mogelijke



figuur 3



figuur 4

Pythagorastripletten gaat het eenvoudiger door ontbinden van factoren. Er moet gelden: $96^2 = a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$, dus twee factoren. Ontbinden van 96^2 geeft $2^{10} \cdot 3^2$. Omdat $a - c$ en $a + c$ altijd van gelijke pariteit zijn en in dit geval dus beide even, hebben we precies dertien mogelijkheden. De ene factor kan zijn: 3×2^1, 3×2^2, ..., 3×2^4 of 9×2^1, 9×2^2, ..., 9×2^9. Dat zijn er dus twee meer dan in het plaatje. Na de mogelijke waarden van a en c te hebben berekend, vinden we behalve de negen driehoeken in het plaatje met aangegeven maten nog: (96,110,146); (96,247,265); (96,765,771) en (96,2303,2305). Daarvan is alleen de laatste, met $a - c = 2$ groter dan die gegeven negen driehoeken. Van Schooten heeft er dus drie te weinig en er ten onrechte twee getekend groter dan (96,1150,1154), met $a - c = 4$. Wij hebben met rood deze correcties aangebracht in zijn figuur.

Met behulp van drie van zulke Pythagorasdriehoeken met gelijke hoogte kan een driehoek zoals figuur 1 worden samengesteld, met alle lijnstukken geheel. Maar die hoogte hoeft natuurlijk zelf niet geheel te zijn. We kunnen ook drie rechthoekige driehoeken kiezen met één (niet noodzakelijk rationale) gemeenschappelijke rechthoekszijde, en de andere twee zijden rationaal. Dan is natuurlijk het kwadraat van de gemeenschappelijke zijde wel rationaal. Sterker, we kunnen eenvoudig laten zien dat elke driehoek zoals figuur 1 op deze manier kan worden opgebouwd.

Ten slotte werd in **opgave 4** een algemene methode gevraagd om zelf driehoeken *ABC* te bepalen met transversaal *d*, met de lijnstukken *a*, *b*, *c*, *d*, *p* en *q* rationaal, anders dan in opgave 1, 2 en 3. Gevraagd werd dit te doen voor een driehoek met hoogte $\sqrt{15}$. Met drie rechthoekige driehoeken met een rechthoekszijde van $\sqrt{15}$ en de andere twee zijden rationaal kunnen we zo'n driehoek *ABC* op verschillende manieren samenstellen. We zoeken dus eerst minstens drie rechthoekige driehoeken met rechthoekszijde $\sqrt{15}$ en nog twee rationale zijden. Onze opdracht was om er vijf te bepalen. Als boven gebruiken we: $15 = (x - y)(x + y)$. Nu mogen we 15 schrijven als product van twee rationale getallen, wat op oneindig veel manieren kan. Bijvoorbeeld 1×15, $2 \times 7{,}5$ en 3×5. Dit geeft rechthoekige driehoeken met zijden ($\sqrt{15}$,7,8); ($\sqrt{15}$,1,4) en ($\sqrt{15}$,2¾,4¾). Deze kunnen we met 4 vermenigvuldigen en aan elkaar plakken tot driehoek *ABC* met gehele *a*, *b*, *c*, *d*, *p* en *q*. Zie bijvoorbeeld figuur 4.

Noot

[1] Schooten, F. van (1632), *Problemata Geometrica*, manuscript - handschrift (GN108). Universiteitsbibliotheek Groningen. Digitaal: *http://facsimile.ub.rug.nl/cdm/compoundobject/collection/manuscripts/id/1609/*

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-2 is:

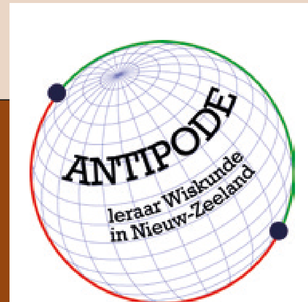
Naam	Punten	Naam	Punten
G. Bouwhuis	196	J. Verbakel	148
F. Göbel	174	H. Klein	123
H. Bakker	159	L. Pos	96
J. Meerhof	159	H. Linders	91
K. Vugs	152	A. Gruneveld	66

We feliciteren Gerard Bouwhuis van harte met de ladderprijs.

TEGENVOETER

CAMPUS EN KLEDING

Roland Meijerink



Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



Mijn school is voor Nederlandse begrippen van gemiddelde grootte: ruim 800 leerlingen en ongeveer vijftig docenten, waarvan de meeste fulltime werken. Het is een school voor jongens en meisjes; ongeveer een derde van de middelbare scholen is daarentegen voor één van beide geslachten. Het schoolterrein is een paar jaar geleden getransformeerd in een prachtige campus, met allemaal nieuwe gebouwen rondom een cirkel van (kunst) gras. Ik werk uiteraard in het gebouw voor *Mathematics*, andere gebouwen zijn bijvoorbeeld voor *Social Sciences* (Aardrijkskunde, Geschiedenis) en de talen (Engels, Maori en Japans). De school heeft naast enkele administratieve gebouwen ook een gymzaal, een groot sportveld en een soort aula. In deze *hall* vinden bijeenkomsten voor leerlingen plaats, maar ook cultuurvoorstellingen, de ouderavonden (ruim vijftig tafeltjes in één ruimte) en aan het eind van het schooljaar de examens. Er is op het schoolterrein ook een verkooppunt voor eten en drinken, dat alleen tijdens de pauzes open is, maar wel een aparte rij heeft voor personeelsleden en leerlingen uit het hoogste leerjaar. Omdat het klimaat hier aangenaam is (als omgeving Middellandse Zee) en Nieuw-Zeelanders het niet zo snel koud hebben, zitten de leerlingen tijdens de twee pauzes van een half uur en drie kwartier altijd buiten. Afgelopen schooljaar was het hooguit tien tot vijftien keer echt regenachtig en koud: dan mogen de leerlingen in de lokalen schuilen en wordt de pauze verkort. De lokalen binnen een gebouwtje zijn met een kleine gang, waarin een aantal computers staan voor leerlingen, verbonden. Verder is de gang alleen voor docenten en heeft elk lokaal een buitendeur die door leerlingen wordt gebruikt. De lokaalmuren zijn één groot prikbord, dat je naar hartenlust kunt voorzien van leermiddelen en versieringen. Op de foto ziet u mijn lokaal.

Naar Engels voorbeeld dragen de leerlingen een schooluniform: een wit overhemd met eventueel groene trui of regenjasje, meisjes een schotse rok en jongens een zwarte lange of grijze korte broek. Ik heb geen exacte statistieken, maar de meerderheid van de jongens draagt die korte broek volgens mij het hele jaar door, omdat ze het, zoals gezegd, niet zo snel koud hebben. Als leerlingen op excursie of naar een prijsuitreiking gaan, of de school vertegenwoordigen bij een andere gelegenheid, dan krijgen ze ook een net jasje en (de jongens) een stropdas aangemeten. De leerlingen uit het hoogste leerjaar hebben overigens een afwijkend uniform, waarbij de jongens sowieso een stropdas hebben. Personeel wordt geacht zich 'passend' te kleden. Dat kan in de zomer best een nette korte broek zijn, maar in principe geen T-shirt of spijkerbroek. Een paar keer per jaar is het *mufti day* en mag het uniform thuisblijven. Die dag is dan speciaal omdat er bijvoorbeeld geld wordt ingezameld voor een goed doel, het begin van de lente wordt gevierd of omdat het nationale rugbyteam *All Blacks* moet worden aangemoedigd voor het wereldkampioenschap (dat ze afgelopen jaar weer hebben gewonnen).

'DE LEERLINGEN UIT HET HOOGSTE LEERJAAR HEBBEN OVERIGENS EEN AFWIJKEND UNIFORM.'

Meer lezen? Ga naar *www.tegenvoeters.nl* of stuur een reactie naar *rmeijerink@karamu.school.nz*.

VANUIT DE OUDE DOOS

UITDAGING

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

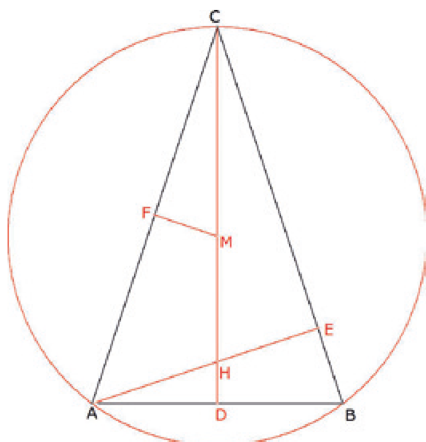


Deze keer twee opgaven uit 1950 en 1951 die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben misschien een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1
In een gelijkbenige driehoek *ABC*, met top *C*, is M het middelpunt van de omgeschreven cirkel, H het hoogtepunt en *D* het midden van *AB*. Men vraagt de hoeken van de scherphoekige driehoek *ABC* te berekenen als:
$MC + HD = AB$.
Ga na welke waarden men k kan geven, opdat er een gelijkbenige driehoek mogelijk is waarin geldt:
$MC + HD = k \cdot AB$.

Opgave 2
Gevraagd de vergelijking op te stellen van de parabool, die het punt (1,0) tot brandpunt en de lijn:
$2x - y + 2 = 0$ tot richtlijn heeft.

figuur 1



Uitwerking opgave 1
Eerst een tekening, met zo weinig mogelijk extra lijnstukken, zie figuur 1. Er zijn gelijkvormige driehoeken aanwezig. U mag één lijnstuk een zelfgegeven waarde geven, en de tekening doorrekenen. Probeert u het even?

Kies (bijvoorbeeld) $AB = 2$, stel $AC = BC = b$.
Gelijkvormige driehoeken: *ABE*, *ADC* (of *BDC*), *ADH* en *CFM*.
Maak een verhoudingstabel:

BE	AE	$AB = 2$
$AD = 1$	$CD = \sqrt{b^2 - 1}$	$AC = b$
HD	$AD = 1$	AH
FM	$CF = \frac{1}{2}b$	CM

Hieruit kunnen we afleiden: $MC = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - 1}}$,

$HD = \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$

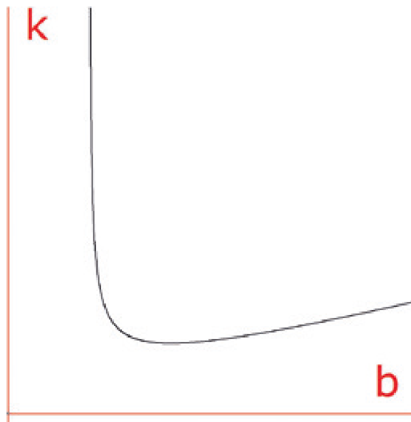
Substitutie in de gegeven formule $MC + HD = AB$ geeft:

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}} = 2$$

Deze vergelijking kunt u natuurlijk oplossen, waarbij, gezien de tekening slechts oplossingen groter dan 1 reëel zijn. U zult vinden: $b = \sqrt{2} \vee b = \sqrt{10}$, waarvan de eerste vervalt omdat de driehoek scherphoekig moet zijn.

Ten slotte is $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, dus $\alpha = \beta \approx 71{,}565^\circ$ en $\gamma \approx 36{,}870^\circ$.

De tweede vraag: $MC + HD = k \cdot AB$, welke waarden kan k aannemen?
Lukt het u?



figuur 2

Invullen van de eerder gevonden uitdrukkingen levert

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} = 2k \text{ , dus}$$

$k(b) = \dfrac{b^2+2}{4\sqrt{b^2-1}}$ met $b > 1$. Bepaalt u van deze functie even het bereik?

Na enig herleiden vanaf de quotiëntregel krijgt u: waarvan het enige nulpunt groter dan 1 gelijk is aan $b = 2$. Een schets van de functie geeft dan het bereik, zie figuur 2.

Dus $k \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Deze opgave past mooi in het huidige curriculum. Wel zou ik de opgave anders presenteren:

Van driehoek *ABC* zijn de zijden $AB = 2$, $AC = BC = b$. In deze driehoek zijn de hoogtelijnen *AE* en *CD* getekend, en is *M* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek. *MF* staat loodrecht op *AC*.
Zie figuur 1. Ook geldt: $MC + HD = k \cdot AB$ waarbij de waarde van *k* varieert. Er zijn driehoeken aanwezig die gelijkvormig zijn met driehoek *ADC*.

a. Welke driehoeken zijn dit?
b. Bereken exact de waarde van *b* in het geval $k = 1$. (Je mag de formule hieronder niet gebruiken bij deze vraag.)

Uit de gegevens kan worden afgeleid dat geldt:

$$k = \frac{b^2+2}{4\sqrt{b^2-1}} \text{ .}$$

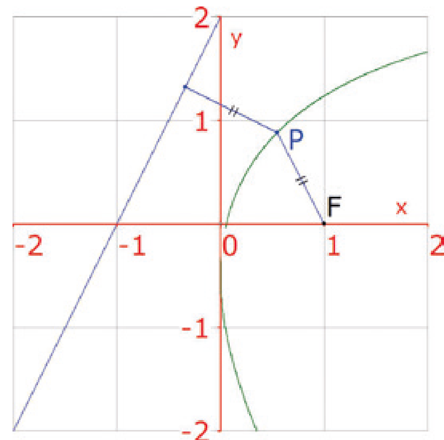
c. Toon aan dat deze formule klopt.
d. Welke waarden kan *k* aannemen?

Uitwerking opgave 2

Stel punt *P(x,y)* ligt op de parabool. Dan geldt:
$d(P, \text{richtlijn}) = d(P, \text{brandpunt})$

$$\frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Dit kunt u herleiden tot $x^2 + 4y^2 - 18x + 4y + 4xy + 1 = 0$
Een *Geocadabra*-tekening ziet u in figuur 3.



figuur 3

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

UITREIKING SCRIPTIEPRIJS

Bert Zwaneveld

Op 7 november 2015, tijdens de jaarlijkse studiedag van de NVvW, is de jaarlijkse scriptieprijs van de NVvW uitgereikt voor de beste scriptie (beter: het beste afstudeeronderzoek) in de bacheloropleiding tot tweedegraads wiskundeleraar van de hogescholen.

De jury, bestaande Henk van der Kooij, Douwe van der Kooi en Bert Zwaneveld, heeft zeven scripties beoordeeld. Die scripties zijn door de lerarenopleiders wiskunde van zeven hogescholen geselecteerd. Uit die zeven heeft de jury er drie geselecteerd die genomineerd zijn voor de prijs. De zeven, door de jury beoordeelde scripties zijn de volgende:

1. *Maak het verschil! Een motief om de competitie aan te gaan?* van Ben Ewals (Hogeschool Inholland). 'Het doel van dit onderzoek is om voor de brugklassen havo en vwo geschikte digitale competitieve spelvormen voor het vak wiskunde te ontwerpen die de motivatie voor het vak wiskunde bevorderen. Welke uitwerking heeft competitie, in de vorm van *Kahoots*, op de motivatie bij brugklasleerlingen Technasium (havo) en Science (vwo) voor de lessen wiskunde?'
2. *Flippen bij wiskunde* van Lisette van de Herik-Evers (Fontys Lerarenopleiding Tilburg). 'Doel van dit onderzoek was een oplossing te vinden voor het probleem dat ik ervoer met betrekking tot het lesgeven aan eerstejaars op 5M. 5M is een vorm van nieuw leren waarbij veel gevraagd wordt van de zelfstandigheid en zelfwerkzaamheid van leerlingen. Voor het vak wiskunde is er wel degelijk behoefte aan extra ondersteuning. Deze ondersteuning moest plaatsvinden in twee contacturen, waarin drie verschillende niveaus (TL, havo en vwo) met twee verschillende methoden werkten. Ik zocht dus naar een manier die mij kon helpen de leeropbrengst te vergroten en de interactie met leerlingen te verhogen.'
3. *Geschiedenis in de wiskundeles, een studie naar het motiveren van leerlingen* van Sanne Deckwitz (Hogeschool van Amsterdam). 'Het doel van dit onderzoek is om lesmateriaal samen te stellen waarbij het gebruik van de geschiedenis van de wiskunde wordt verantwoord vanuit het perspectief van het motiveren van leerlingen.'
4. *Bevordert gepersonaliseerd leren de motivatie en prestatie van leerlingen?* van Michella Roumans (Fontys Lerarenopleiding Sittard). 'Door middel van dit onderzoek doe ik (meer) ervaring op met het ontwerpen van lesmateriaal, waarbij ik tegemoet kom aan verschillen tussen leerlingen. Daarnaast leer ik omgaan met het hanteren van verschillende werkvormen om tegemoet te komen aan verschillen tussen leerlingen. Dit onderzoek wijst uit of de motivatie en prestaties van leerlingen verbeteren door gepersonaliseerd leren, voor de leerlingen op deze school.'



figuur 1 Van links naar rechts: Sanne Deckwitz, Lisette van de Herik-Evers en Ed Nigg. Fotograaf: Aad Monquil

5. *Wiskundige denkactiviteiten, draagt in de klas mijn oplossingsschema bij aan een toename van het zelfvertrouwen van de leerling bij het oplossen van open oplossingsproblemen op het gebeid van de vlakke (Euclidische) meetkunde?* van Ed Nigg (Hogeschool van Rotterdam). 'De commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs heeft bedacht dat Wiskundige Denkactiviteiten voor een belangrijk deel de eindexamens van het havo en het vwo dienen te gaan kenmerken. Dat de invoering van de lessen vanaf het vierde leerjaar plaats gaat vinden is voor mij aanleiding geweest om te kijken of het zelfvertrouwen bij het maken van dergelijke opdrachten van de leerlingen in de onderbouw van voornoemde schoolsoorten verstevigd kan worden. Daartoe heb ik een

oplossingsschema (heuristiek) geïntroduceerd die stap voor stap uitlegt hoe een wiskundige denkactiviteit aangepakt kan worden zodat leerlingen hier steun uit kunnen halen.'

6. *Vergelijkingen in balans, Onderzoek naar de invloed van de volgorde van het aanleren van de inklemmethode en de balansmethode op de beheersing van beide methodes bij het oplossen van vergelijkingen in TK2* van Jolien de Vreede (Hogeschool van Arnhem en Nijmegen). 'Op het Dendron College te Horst zijn er al enkele jaren problemen omtrent het doceren van het hoofdstuk *Vergelijkingen oplossen*, uit het boek *Getal en Ruimte*, bij TK2-leerlingen. In vergelijking met de resultaten van andere hoofdstukken bleken de behaalde resultaten bij het hoofdstuk *Vergelijkingen oplossen* relatief slechter te zijn. Het uitgevoerde onderzoek probeert dan ook een verklaring te vinden voor de achterliggende oorzaken van deze tegenvallende resultaten.'
7. *De formule van Euler voor veelvlakken* van Jeanet Korevaar van der Grift (Driestar Hogeschool). 'Is er eigenlijk een manier om uit te rekenen hoeveel veelhoeken ik nodig heb voor de fabricage van een bal en hoe zit dat met andere veelvlakken? Zoals de titel van de scriptie al doet vermoeden heeft Leonhard Euler een stelling voor veelvlakken gemaakt, waarin we kijken naar het aantal hoeken, zijdes en ribben. Het bovenstaande brengt mij dan bij de vragen die ik me stel in deze scriptie.'

De jury heeft van deze zeven scripties die van Lisette van de Herik-Evers, Sanne Deckwitz en Ed Nigg genomineerd. Bert Zwaneveld reikte de prijs, een 3D print van Rinus Roelofs, uit. Hij heeft daarbij onder andere het volgende gezegd:

Namens de jury van de scriptieprijs van de NVvW mag ik bekend maken wie de van de drie genomineerden, de prijs heeft gewonnen. Alvorens ik dat doe, wil ik kort het beoordelingsproces en de overwegingen van de jury aangeven die tot de unanieme keuze voor de winnaar hebben geleid. Bij het beoordelen van de zeven ingestuurde scripties hebben een tweetal typen overwegingen een rol gespeeld. Het eerste type bestaat uit de vereisten die vanuit de hogescholen aan dergelijke scripties worden gesteld: het moet een praktijkonderzoek zijn volgens het volgende model: er is een aanleiding/probleem, de wetenschappelijke en/of vakliteratuur over dat probleem is geïnventariseerd, er is een opzet voor de aanpak van dat probleem in de klas, er is een opzet voor het verzamelen van data bij die opzet plus de analyse ervan, er worden resultaten beschreven, en er worden conclusies uit de resultaten getrokken die kritisch bediscussieerd worden vanuit de manier waarop het onderzoek is uitgevoerd en vanuit het bestudeerde theoretische kader. Mooi is het natuurlijk ook als de student reflecteert op wat het onderzoek hem of haar geleerd heeft. Uiteraard is er een goede literatuurlijst bij. Het tweede type overwegingen wordt gevormd door de relevantie voor het professionele handelen van de aanstaande tweedegraads leraar wiskunde: voor ons als jury van de scriptieprijs van de Nederlandse Vereniging van *Wiskundeleraren*, het wiskundig-didactisch handelen. Denk aan het stellen van (korte- en langetermijn-)doelen, hoe die doelen (vermoedelijk) bereikt kunnen worden, hoe kan worden nagegaan of die doelen bereikt zijn, wat er vervolgens verder verbeterd kan worden. En dit alles met gebruikmaking van wetenschappelijke en vakliteratuur.
Alle drie de genomineerde onderzoeksverslagen voldeden aan de vereisten vanuit de hogescholen, maar sommige voldeden beter aan de wiskunde-didactische vereisten dan andere.
Van de drie genomineerde scripties heeft die van Ed Nigg met zijn onderzoek naar de wiskundige denkactiviteiten de prijs gewonnen. Hij voldeed volgens het unanieme oordeel van de jury het best aan beide typen vereisten. Namens de jury feliciteer ik hem hiermee.

Bert Zwaneveld, mede namens Henk van der Kooij en Douwe van der Kooi

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het wiskunde- en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.
E-mailadres: *G.Zwaneveld@uu.nl*

MEDEDELING



NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De 55e editie van de Wiskunde Olympiade is van start gegaan. Op ruim 300 scholen hebben leerlingen zich vastgebeten in de verrassende en uitdagende opgaven van de eerste ronde. Deze zijn nu, samen met de uitwerkingen, te vinden op de website *www.wiskundeolympiade.nl*. De ongeveer 1000 beste leerlingen van de eerste ronde mogen verder naar de tweede ronde. Op 8 februari maken we via de site bekend hoeveel punten leerlingen nodig hebben om tot deze 1000 winnaars te behoren. Daarnaast maken we rond deze tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school *overall*, de school met de beste vrouwelijke deelnemers, de school met de beste onderbouwleerlingen en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt uw school dit jaar in de prijzen!

PERSPECTIEF TEKENEN IN DE TEKENLES

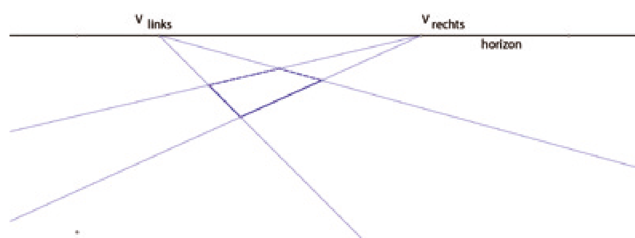
Rob van Oord

In november 2014 is Rob van den Oord als invalkracht aan het werk gegaan op Lyceum Ypenburg. Daar kwam hij in de pauze te spreken met een jonge tekenlerares. Ze was in de tweede klas bezig met perspectieftekenen. Rob vroeg hoe ze dat dan doen. Er ontstond een dialoog, gevolgd door een vanzelfsprekende samenwerking.

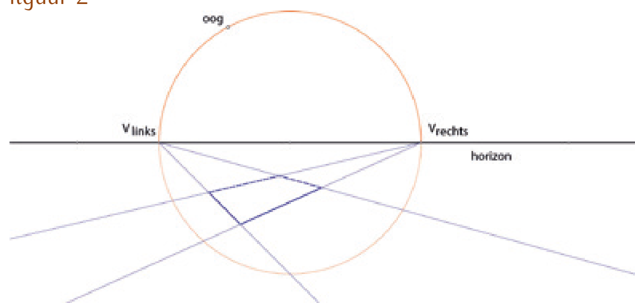
Ze vertelde dat er eerst een horizon getekend wordt met twee vluchtpunten. Twee paar lijnen vanuit die vluchtpunten bepalen dan de ligging van het huis. Zie figuur 1. Het midden vinden ze dan wel door een kruis op de bodem te tekenen. Vandaar uit wordt dan de rest van het huis geconstrueerd. Ik vroeg toen hoe ze de breedte van (even grote) ramen daarin zetten. Dat doe je door ze voorin iets groter te tekenen dan achterin. Er was geen wiskundige redenering bij nodig vond ze. Als het niet lijkt dan gum je ze gewoon even uit en probeer je het nog eens. Dit zette mij er toe om eens uit te zoeken hoe het dan echt verder moet. Ik heb het onderstaande stukje aan haar gegeven. Ik hoop dat ze bij tekenen nu beter snappen hoe het in elkaar steekt.

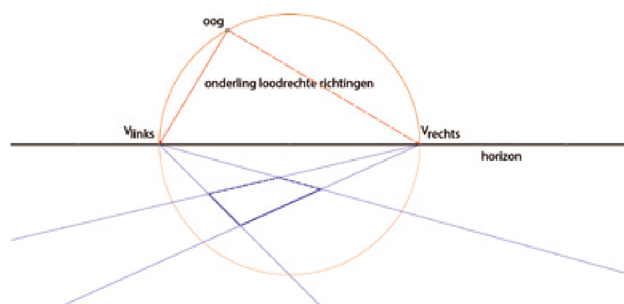
Bij het perspectief tekenen beginnen jullie (docenten beeldende vorming) met een *horizon* met twee vluchtpunten, de verdwijnpunten. Met die verdwijnpunten wordt de richting gegeven van onderling loodrechte lijnen. In werkelijkheid vormen de snijpunten van een paar lijnen vanuit het ene verdwijnpunt met een paar lijnen vanuit het andere verdwijnpunt een rechthoek (de contouren van een huis, de bodem van een balkvorm). Daarna worden de muren getekend, tot aan een tweede koppel van paren lijnen vanuit de verdwijnpunten, waarmee als het ware het plafond van de balk wordt bepaald. Enzovoorts.

figuur 1



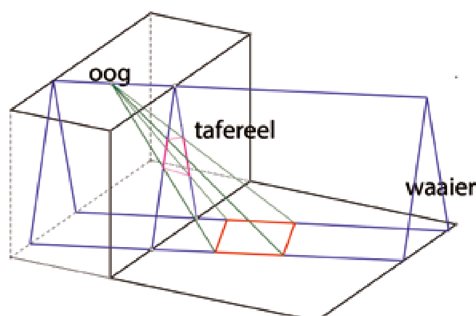
figuur 2



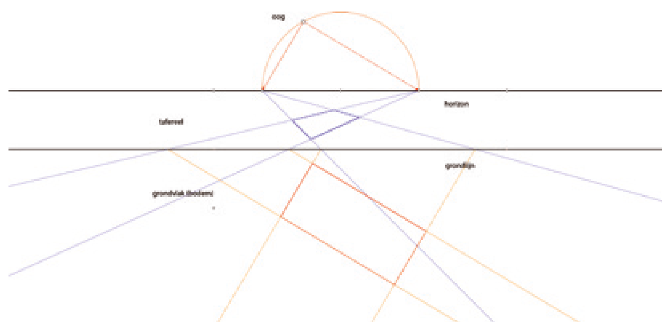


figuur 3

Maar hoe weet je nu hoe de werkelijke bodem van het huis er uit ziet? Daarvoor moet je behalve de twee verdwijnpunten ook de plaats van het oog weten. Wiskundig kun je verklaren dat het oog op de halve cirkel moet liggen die als middellijn het verbindingslijnstuk van de verdwijnpunten heeft. Zie figuur 2. Je weet immers dat in werkelijkheid de muren onderling loodrecht staan. Deze loodrechte kijkrichtingen, vanuit het oogpunt, bepalen dat het oog op de net genoemde cirkelboog moet liggen. Zie figuur 3. De stelling van Thales zegt dat het hoekpunt van een loodrechte hoek met de benen naar twee vaste punten, in dit geval de gegeven verdwijnpunten, altijd op een halve cirkel (zoals die net is beschreven) komt te liggen. Bij elke positie van het oog op deze halve cirkel ziet het origineel bij de in perspectief getekende rechthoek er wel iets anders uit. Hoe dat zit, dat lees je hierna.



figuur 4

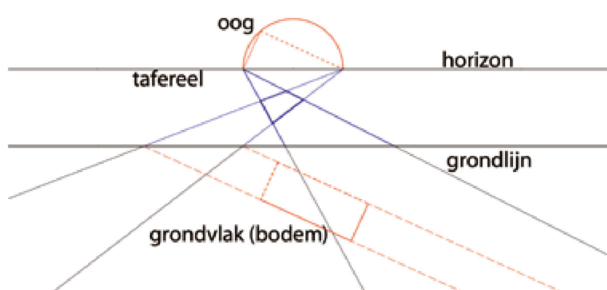


figuur 5

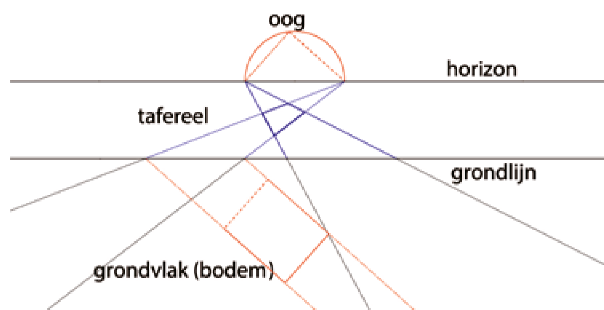
Bij wiskunde beginnen we andersom. Je hebt te maken met het *tafereel* waarop de perspectief tekening komt, het (horizontale) vlak (het oogvlak) waarin het *oog* van de tekenaar zit, en dus ook van de kijker, en het *grondvlak* waarop het voorwerp staat dat je wilt tekenen. Je tekent eerst in het grondvlak het bovenaanzicht van het voorwerp (de balk) dat je in perspectief wilt tekenen. Wanneer de balk haaks op de horizon staat en je dus recht naar de voorkant van het voorwerp kijkt dan heb je te maken met eenpuntsperspectief. Omdat de loodrechte richting hierop evenwijdig aan het tafereel loopt, en die richting dus geen verdwijnpunt op de horizon heeft, heb je de diagonale richtingen nodig om in het perspectief de in werkelijkheid gelijke afstanden goed weer te geven. Denk aan het tekenen van een tegelvloer met vierkante tegels, of aan de afstand tussen bielzen van een naar de horizon lopende spoorrails. Hierover later meer.
Bij het in perspectief tekenen van een rechthoek die schuin op het grondvlak staat komen de twee richtingen van de (evenwijdige) muren uit bij twee verdwijnpunten op de horizon in het vlak van het oog. In de wiskunde stellen we van te voren het oogpunt vast; dit is het punt vanwaar de tekenaar de tekening in perspectief tekent. Met het kiezen van dit punt is meteen de afstand van het kijkpunt tot het tafereel vastgelegd. Dit is precies de afstand van het oogpunt tot de horizon. Om de perspectieftekening als een ware weergave van de werkelijkheid te zien moet je dus op die afstand van het tafereel (met een oog) naar de tekening kijken. De verdwijnpunten op de horizon vind je door vanuit het oogpunt lijntjes te tekenen die parallel lopen met de richtingen van de rechthoek in het grondvlak. Wiskundig gezien construeer je de snijlijn van een waaier van vlakken met het vlak van het oog, waarbij de waaier bepaald wordt door het oogpunt en evenwijdige lijnen in het grondvlak (een punt en een lijn bepalen precies één vlak). Het tafereel is een derde vlak dat loodrecht staat op het grondvlak, waarin de rechthoek ligt die je in perspectief gaat tekenen, en die ook loodrecht staat op het oogvlak. In de perspectieftekening op het tafereel worden feitelijk de snijlijnen getekend van (twee van) de vlakken uit de waaier. Zie figuur 4. Op deze manier ontstaan twee paren lijnen die de bodem van de balk in perspectief weergeven. Zie figuur 5. Om goed te begrijpen hoe het zit kun je het beste figuur 5 overnemen en uitknippen. Vervolgens moet je het in een zigzag vouwen over de grondlijn en de horizon, zodat het tafereel precies loodrecht op het grondvlak en het oogvlak.
Omdat jullie beginnen met de verdwijnpunten en daaruit een perspectief rechthoek tekenen is de stand van het origineel (dat bij jullie fantasie is) niet eenduidig bepaald. Bij een andere positie van het oog op de halve cirkel worden de onderling loodrechte kijkrichtingen (naar de verdwijnpunten) ook anders. De lijnen vanuit de snijpunten van de perspectief rechthoek met de grondlijn krijgen dan ook andere richtingen. Ze moeten evenwijdig getekend worden met de nieuw ontstane kijkrichtingen vanuit het oog. Zie figuur 6. Als eenmaal de plaats van het oog, en daarmee ook de afstand waarop je van het tafereel moet staan om de perspectief tekening als 'echt' te kunnen zien, gekozen is (op de cirkelboog), dan zijn daarmee de richtingen van de onderling loodrechte muren ook vastgelegd.

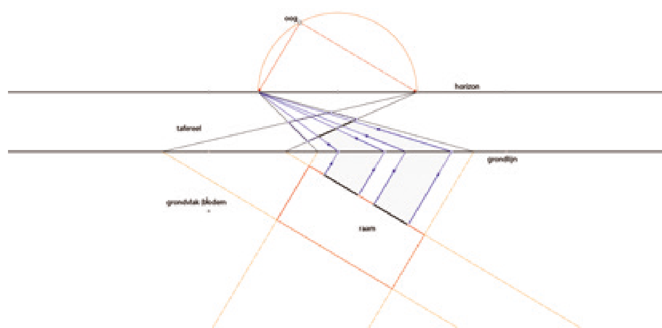
Om het perspectief tekenen goed te begrijpen gaan we dus vanuit de door jullie getekende verdwijnpunten (terug) zoeken naar de werkelijke positie van de balkvorm op het grondvlak. Het kan zijn dat je extra vellen papier nodig hebt die je aan je tekening moet plakken, om er echt uit te komen. Hierbij is de keuze van de grondlijn bepalend voor de schaal waarop je het voorwerp kiest. Het maakt uiteindelijk niet uit op welke schaal je het voorwerp (of een maquette ervan) neerzet. Bedenk dat een groot huis dat veraf staat even groot op je schilderij in perspec-

figuur 6a

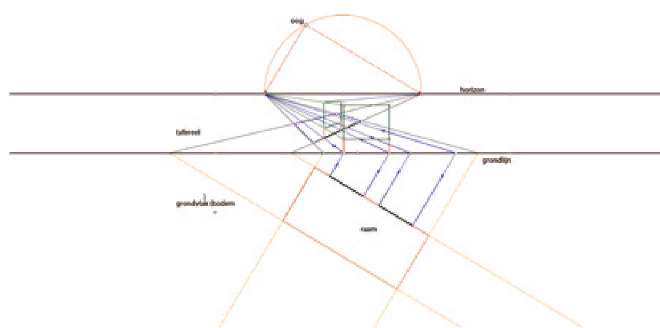


figuur 6b





figuur 7



figuur 8

tief wordt afgebeeld als een klein huis (op schaal) dat dichterbij staat. Als je in het bovenaanzicht in het grondvlak de positie van ramen en deuren hebt getekend, kun je daarna ook hun plaats in het perspectief vaststellen. Parallel met de gegeven kijkrichtingen kun je de plaats ervan op de grondlijn bepalen en vervolgens door deze punten met de verdwijnpunten te verbinden de positie in de perspectief tekening. Je brengt als het ware de onderverdeling van de muren over in het perspectief op dezelfde manier als je dat met de hele muur deed. Zie figuur 7.
Tot slot moet je ook de werkelijke hoogte van het huis, van de ramen, enzovoorts, nog in het perspectief krijgen. Daarvoor zet je in de beeldpunten van de hoekpunten van de muren, en de plaatsen van de ramen en deuren op de muren, op de grondlijn de werkelijke hoogte. Dit zijn de groene verticale lijntjes in figuur 8.

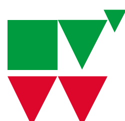
Verbind de daar getekende hoogte met het bijbehorende verdwijnpunt. Teken vervolgens de hoogte in het perspectief omhoog vanuit het hoekpunt in het perspectief tot aan de net getekende verbindingslijn. In figuur 8 zie je dit gedaan voor het raam links.

Over de auteur

Rob van Oord was sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

AANKONDIGING

'LEARN TO USE!' ?



Op zoek naar de nodige vaardigheden voor het werken met rekensoftware uit de beroepspraktijk? De Landelijke werkgroep HBO-wiskunde (werkgroep van de NVvW) organiseert op 9 maart 2016 een conferentie, waarin we willen onderzoeken welke eisen het gebruik van huidige en toekomstige rekensoftware (technisch en economisch) stelt aan wiskundige kennis, inzichten en vaardigheden van mbo- en hbo-afgestudeerden. Daarnaast verkennen we de gevolgen van deze eisen voor het wiskunde-curriculum binnen het mbo en hbo en hopen daarmee een bijdrage te leveren aan een versterkt wiskunde-curriculum in de opleidingen voor de technische en economische mbo-er/hbo-er van de toekomst.

De conferentie zal worden gehouden op woensdagmiddag 9 maart 2016 aan de Hogeschool Domstad in Utrecht. Het globale programma ziet er als volgt uit:

- Na een lunch worden twee plenaire presentaties gehouden over wiskunde en ict in de beroepspraktijk
  - *John Poppelaars* (zie ook het artikel *Wiskunde op het werk* in deze *Euclides*)
  - *Nathalie van der Wal* zal vertellen over haar promotieonderzoek naar het gebruik van wiskunde in de beroepspraktijk van hbo-ingenieurs.
- Daarna volgen enkele parallelle workshops per domein waarin aan de hand van concrete casussen (van veelgebruikte rekensoftware) boven tafel wordt gehaald welke eisen gelden voor algemene en wiskundige kennis, inzichten en vaardigheden van de gebruiker en formuleren we aanbevelingen voor de vertaling ervan in het curriculum.

Voor uitgebreidere informatie en inschrijving kunt u terecht op de pagina van de LWHW op de site van de NVvW (*www.nvvw.nl*)

VASTGEROEST

Ab van der Roest

DE SCHADUWZIJDE VAN HET LERAAR ZIJN

Ab van der Roest bespiegelt de uitwerkingen van zijn leerlingen van een vraagstuk dat hij op een schriftelijke overhoring had gegeven. En dan blijkt dat het in de schaduw helemaal niet zo onaangenaam is.

De schaduwzijde van het leraar zijn, is het nakijken van schriftelijke overhoringen en repetities. Toch moet het gebeuren. Het is ook erg nuttig want dan kun je een inschatting maken van het kunnen van de leerling en vooral ook van hoe hij werkt. In een schriftelijke overhoring aan 4 vwo wiskunde A stond de volgende opgave:

In Frankrijk was er een enorme regenbui. In een paar uur tijd was er 300 mm regen gevallen. Boer Richard heeft een perceel van 2100 m^2. We nemen aan dat boer Richard dit water op kan vangen. Boer Richard heeft een zwembad van 25 m bij 15 m. Bereken hoe diep het zwembad moet zijn zodat al het water er precies in past.

Zeker geen contextrijke opgave, want de onmogelijkheid van deze situatie straalt er vanaf, maar mijn collega en ik wisten niet zo snel een betere context te bedenken. Nu ik er nog eens over nadenk, zou de vraag waarschijnlijk veel realistischer zijn met het dak van mijn tuinhuis en een regenton. Gelukkig zijn de leerlingen niet zo kritisch dat ze zeggen dat het een onmogelijke opgave is, omdat het water niet opgevangen kan worden.

Ik had voor mezelf het volgende nakijkmodel gemaakt:
Hoeveelheid regen die valt is 0,3 × 2100 = 630 m^3 (1 punt)
De regen komt in het zwembad.
Volume zwembad = 630 m^3
Volume = $l \times b \times d$; 630 = 25 × 15 × d (1 punt)

$$d = \frac{630}{375} = 1{,}68 \text{ m (1 punt)}$$

Drie stapjes en elk stapje is een punt waard.

De leuke kant van schriftelijke overhoringen nakijken is dat je tijdens het nakijken nieuwe ideeën krijgt. Het is dus niet alleen kommer en kwel. Tijdens het nakijken bedacht ik nog een alternatief dat helaas door geen enkele leerling werd gevonden: als er 300 mm = 30 cm regen op 2100 m^2 valt, en de totale hoeveelheid water op 375 m^2 terecht moet komen, dan is de waterkolom

$$\frac{2100}{375} \times 30 = 168 \text{ cm hoog.}$$

Een van mijn worstelingen is dat ik soms niet goed weet hoeveel ik punten ik moet geven. Het lijkt wel of ik dat steeds moeilijker ga vinden.

Voorbeeld 1:
300 mm = 0,3 m
2100 × 0,3 = 630 m^3
630 : 25 : 15 = 1,68 m

Geen enkel woord ter toelichting. Eigenlijk staan er drie sommetjes en wat het voorstelt weet je niet, tenzij je de leraar bent die de som gemaakt heeft en de getallen herkent. Natuurlijk kun je bedenken dat de gedachtegang van de leerling goed is, maar is daarmee de som ook volledig goed beantwoord? Ik worstel dan tussen 1, 2 en 3 punten.

Voorbeeld 2:
Inhoud regen = 2100 × 0,3 = 630 m^3
25 × 15 = 375 m^2; 630 : 375 = 1,68 m
het zwembad moet 1,68 m diep zijn

Er zijn meer woorden gebruikt, maar vooral de tweede regel zijn weer losse kreten. Mijn waardering is hoger dan bij voorbeeld 1, maar alle punten wil ik hier eigenlijk niet geven.

Voorbeeld 3:
300 mm regen
2100 m^2 perceel; 630000 mm in totaal
= 630 m
Zwembad 25 × 15; dus het wordt 630 : 375 = 1,68
Zwembad moet 1,68 m diep zijn

Ik denk dat er per ongeluk een redelijke waarde uit komt en dat is waarschijnlijk de reden waarom de leerling dit antwoord accepteert. Ik gaf 0 punten, want volgens mij begrijpt hij er niets van en doet maar wat.
Gelukkig zijn er ook leerlingen die het gewoon goed doen, maar bijna niemand schrijft het op met een begrijpelijke begeleidende tekst. En juist die begeleidende tekst helpt de leerling bij het denken en bij het leren. Kortom er is nog veel te leren.

Math Plus

Wiskunde van nu

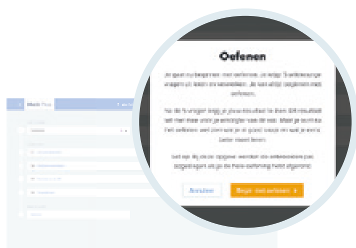
Speel beter in op niveauverschillen

Er bestaan relatief grote verschillen wat betreft de niveaus en leerstijlen van leerlingen. MathPlus geeft u meer mogelijkheden om in te spelen op deze verschillen.



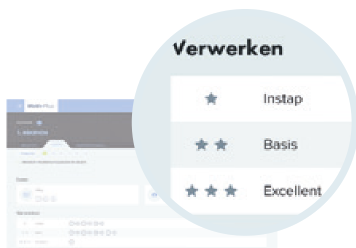
De instaptoets zorgt voor een goede basis

Een instaptoets bepaalt of de leerlingen over de benodigde kennis en vaardigheden beschikken om aan een nieuw hoofdstuk te beginnen.



De oefentoets geeft individueel studieadvies

Dit persoonlijke studieadvies stuurt leerlingen gelijk terug naar de uitleg en oefeningen die bij dit onderwerp horen.



Adaptief verwerken haalt het beste uit alle leerlingen

Doel is dat de leerlingen de opgaven op het basisniveau goed maken en zo zien of zij de stof begrijpen.



MathPlus ondersteunt verschillende leerstijlen

Elke leerling heeft een voorkeursstijl om de stof op te nemen. Als docent heeft u de regie en bepaalt u hoe de leerlingen met de stof werken.

Ervaar MathPlus: vraag een pilot aan!



Wilt u vrijblijvend MathPlus uitproberen bij u in de klas?
Vraag dan een gratis pilot aan. U krijgt (tijdelijk) beschikking over het volledige lesmateriaal van MathPlus.
We begeleiden u graag tijdens deze vrijblijvende pilot.

Vraag aan via:

www.mathplus.nl • sales.vo@malmberg.nl • 073 - 628 8766

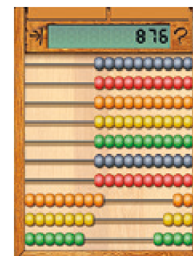
MALMBERG
a Sanoma company

Math4all

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

EUCLIDEA

Lonneke Boels



Een collega introduceerde een spel met meetkundige constructies met de welluidende naam *Euclidia*. Lonneke Boels was meteen verkocht en deelt de opbrengst met ons.

Euclidia is niet alleen een echt spel en echte wiskunde, het gaat ook nog eens over de basis van onze wiskunde: meetkundige constructies. Het doel van dit spel is om een constructie te maken die exact het gevraagde oplevert. Bijvoorbeeld om de bissectrice van een hoek te construeren of een middelloodlijn van een lijnstuk. Het spel begint heel eenvoudig met opdrachten die bedoeld zijn om de mogelijkheden van het spel te leren kennen, bijvoorbeeld de *line tool*. Als je de opdracht behaald hebt en aan alle eisen voldoet, krijg je drie sterren: één voor de opdracht, één voor het gebruiken van niet meer dan het maximale aantal lijnstukken en één voor het gebruiken van niet meer dan het maximale aantal zetten (*E = elementary moves*).



figuur 1 De opdracht is om het middelpunt van de gegeven cirkel te vinden. Daarbij mogen maximaal twee lijnen (L) oftewel krommen (dus een cirkel kan dan ook) en vijf elementaire zetten (E) worden gebruikt. In bovenstaande oplossingen zijn vier krommen gebruikt (twee cirkels, middelloodlijn en lijnstuk door raakpunten) en vier hoekpunten (de twee raakpunten en de twee snijpunten van de grote cirkels). Het is dus een oplossing waarbij twee sterren worden verdiend: één voor het oplossen van de puzzel en één voor het gebruiken van minder dan vijf elementaire zetten.



figuur 2 Constructie van een ruit in een rechthoek

Na verloop van de tijd worden de opdrachten moeilijker. Het blijkt bovendien dat je maar vijf kansen hebt om de opdracht te voltooien voor drie sterren. Als de opdrachten moeilijker worden, zijn er vaak meerdere constructies mogelijk. Maar welke constructie is 'het zuinigst' dus gebruikt de minste lijnen en zetten? Soms lukt het dan niet om die derde ster binnen te halen. Het kopen van een oplossing door middel van het inleveren van verdiende muntjes blijkt niet zinvol want dit geeft wel een tip voor een mogelijke oplossing, maar niet de ideale oplossing. Nog even doorpuzzelen dus. Je kunt leerlingen hier gerust een les (of een paar) mee laten spelen. Je leert er ontzettend veel van over constructies en het is in feite een goede voorbereiding op het examen wiskunde B tot het examenprogramma verandert. Daarna kun je 'los' gaan in je lessen wiskunde D.

Pluspunten

- het is een echt spel;
- het is echte wiskunde uit het domein vlakke meetkunde;
- het sluit aan bij het oude examenprogramma wiskunde B en het nieuwe examenprogramma wiskunde D;
- het is leuk en uitdagend om te doen;
- het spel kent vele niveaus;
- het is een enorme uitdaging om de oplossing met het minimale aantal stappen te vinden;
- het is leuk om de opbouw van de elementen van Euclides te vergelijken met dit spel;
- er zijn 89 niveaus;
- er is een *exploremodus*.

Minpunten

- het lijkt erop dat je niet meer dan vijf keer een probleem kunt oplossen (bijvoorbeeld omdat je wel een oplossing hebt gevonden, maar niet de ideale);
- het wordt voor sommige leerlingen misschien snel erg pittig;
- het spel heeft *in-app* aankopen.

Eindoordeel: aanschaffen

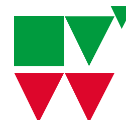
Geschikt voor: bovenbouw vwo wiskunde B en D
Kosten: € 0,99; Er is ook een gratis versie; de betaalde versie is getest. Getest op: Ipad met iOS versie 9.1.
Website: *www.euclidea.xyz*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*



DIGITALE EXAMENS WISKUNDE



Ebrina Smallegange

Vlak na de zomervakantie vroeg het College voor Toetsen en Examens aan de NVvW een docentenpanel samen te stellen om in gesprek te gaan over de digitale wiskunde-examens van vmbo BB en vmbo KB. Daar was grote animo voor. Hieronder volgt een verslag van deze bespreking. Voor degenen die niet bekend zijn met de regelingen omtrent de digitale examens van vmbo BB en KB hier een kort, niet uitputtend, overzicht: scholen mogen de digitale examens afnemen tijdens een aantal maanden. Er zijn tijdens een schooljaar daarom wel twaalf versies van een wiskunde-examen beschikbaar. Die versies krijgen alle verschillende N-termen. Tijdens het maken van het examen voert de leerling in het toetsprogramma de antwoorden van de opgaven op het computerscherm in. Gesloten vragen kijkt de computer zelf na. De docent beoordeelt de antwoorden op open vragen. Bij wiskunde zijn er niet veel gesloten vragen omdat bij de meeste vragen de berekening een deel van het antwoord is. Na het examen is er geen tweede correctie. Er zijn scholen waar de examens daarom door twee docenten tegelijk worden nakeken. Verder neemt het Cito na de examenuitslagen steekproeven. Tot nu toe is het gebruikte toetsprogramma *ExamenTester*. Dit programma had onder andere als nadeel dat het werk niet thuis gecorrigeerd kon worden, maar alleen op school, op daarvoor aangewezen computers. In 2016 zullen alle digitale examens worden afgenomen met *Facet*. Docenten kunnen daardoor nu ook thuis de examens nakijken.
Als u eens een digitaal examen wilt inzien: Op de site *http://oefenen.facet.onl* staan voorbeeldexamens. Leerlingen kunnen daar oefenen met een examen maar ook met de rekenmachine en de *toolbox*.

Tot nu toe is er geen tweede correctie bij de digitale examens, dat zullen docenten die alleen ervaring hebben met papieren examens wel bijzonder vinden. Dat zal veranderen: in 2016 zal er een pilot 'tweede correctie' zijn. De examensecretaris kon zijn school hiervoor aanmelden. Bij deze pilot zal het door de leerlingen gemaakte werk naar een tweede corrector worden gezonden. De tweede corrector kijkt het werk integraal na en meldt zijn puntentoekenning en eventuele opmerkingen in het correctieprogramma, zonder de puntentoekenning of de opmerkingen van de eerste corrector te kunnen zien. Daarna wordt er een overzicht van de beide correcties naast elkaar gelegd en kan het overleg beginnen. Het docentenpanel vindt dit een positieve ontwikkeling. Men is ervan overtuigd dat overleg met collega's de kwaliteit van het nakijkwerk ten goede zal komen.
Bij digitale examens zijn weinig mogelijkheden voor overleg. Bij de papieren examens zijn er examenbesprekingen en kunnen we bij twijfel via het forum van de NVvW de mening van collega's vragen. Bij de digitale examens is dat niet het geval.
Waarom eigenlijk niet? Er is door het CvTE een aantal redenen genoemd. Ten eerste de langere periode waarin het examen afgenomen mag worden: sommige leerlingen maken het examen al in april, anderen pas in juni. Aan het eind van de examenperiode zouden de digitale examens wel besproken kunnen worden, ware het niet dat er opgaven geheim gehouden moeten worden. Sommige *ankeropgaven* worden namelijk vaker gebruikt. Hierdoor kan men het niveau van de populatie vergelijken met dat van voorgaande jaren. Verder bemoeilijkt het aantal versies dat per jaar gebruikt wordt (twaalf versies!) een goede bespreking van het examen. Toch hebben de examenmakers en de docenten ieder met hun eigen redenen behoefte om de digitale examens te bespreken. Zo vinden de aanwezige docenten het niet wenselijk dat een docent jaar in jaar uit in zijn/haar eentje een examen nakijkt, zonder enige vorm van overleg. Aan de andere kan willen de examenmakers van docenten graag weten hoe zij tegen de vorm en de inhoud van het examen aankijken. Een belangrijke uitkomst van deze evaluatiemiddag is dan ook dat de NVvW met het CvTE in overleg zal gaan om toch een soort examenbespreking mogelijk te maken. Wordt vervolgd!

Over de auteur

Ebrina Smallegange is bestuurslid van de NVvW. E-mailadres: *esmallegange@gmail.com*



EVEN VOORSTELLEN: NIEUWE BESTUURSLEDEN

Tijdens de jaarvergadering van 7 november j.l. zijn vier nieuwe bestuursleden benoemd. We stellen ze hieronder aan jullie voor.



Gert Treurniet is docent op Christelijk Gymnasium Sorghvliet in Den Haag. Hij studeerde elektrotechniek. Later behaalde hij zijn eerstegraads onderwijsbevoegdheid wiskunde aan de TULO in Delft. Gert werkte eerder bij ingenieursbureaus. Sinds 2002 werkt hij in het onderwijs. Verder heeft hij enkele jaren voor Texas Instruments gewerkt. Uit deze werkzaamheden is zijn lidmaatschap van T3 overgebleven. Momenteel is Gert ook werkzaam als eindredacteur voor de bovenbouwmaterialen van MathPlus. Zijn interesses zijn wiskunde, ict en nascholing op dit gebied.



Tanja Groenendaal werkt als docent wiskunde en onderzoeksvaardigheden bij Hogeschool Utrecht, Faculteit Economie en Management. Ze is een typische ‘veelstudeerder’; HTS Bouwkunde in 1984, HTI Bouwprojectleider in 1995, Parttime Doctoraal Programma Nyenrode in 2000, tweedegraads wiskundelerarenopleiding in 2007 en eerstegraads in 2011. Na twintig jaar werken in de bouw heeft ze in 2005 de overstap gemaakt naar het onderwijs. Sinds 2011 is ze lid van de Landelijke Werkgroep HBO Wiskunde. Haar belangstelling gaat daar specifiek uit naar de instroom vanuit het mbo, en naar de wiskundige basiskennis die eerstejaars studenten nodig hebben om succesvol te zijn binnen economische opleidingen. Ze is onder andere betrokken bij het regionale netwerk mbo-hbo, dat is bedoeld om de doorstroom te bevorderen. In haar vrije tijd is Tanja ict-auteur voor *Moderne Wiskunde*. De rest van de tijd is bestemd voor lezen, kamperen en genieten van de mooie dingen van het leven.



Wim Caspers geeft wiskunde op het Adelbert College in Wassenaar, nu al weer een jaar of twintig. Hij studeerde wiskunde in Nijmegen en deed daar ook de lerarenopleiding. Daarna promoveerde hij in Delft op een onderwerp uit de functionaalanalyse. Sinds 2004 werkt hij - naast het lesgeven in Wassenaar - halve dagen weer aan de TU in Delft om de aansluiting tussen het vwo en de universiteit te verbeteren. Ook verzorgt hij colleges voor de lerarenopleiding van de TU en werkt hij voor het bètasteunpunt Zuid-Holland mee aan nascholingscursussen. Hij is lid van de onderwijscommissie van het Platform Wiskunde Nederland en is voorzitter van het overleg tussen de wiskunde vaksteunpunten in Nederland. In het verleden maakte hij ook deel uit van de resonansgroep wiskunde en commissies rond de 3S-rekentoets. Hij hoopt gebruikmakend van zijn ervaring veel nuttige bijdragen te kunnen leveren aan het bestuurswerk.



Michiel Doorman heeft in Utrecht wiskunde gestudeerd. Sindsdien werkt hij bij het Freudenthal Instituut. Hij begon als softwareontwikkelaar en later werkte hij mee in vernieuwingsprojecten zoals Profi, cTWO, wiskunde C en het domein logisch redeneren. In 2005 promoveerde Michiel op een onderzoek naar de beginselen van de differentiaalrekening en kinematica. Jarenlang was Michiel voorzitter van de Nationale Wiskunde Dagen. Tegenwoordig is hij betrokken bij EU-projecten waarin hij ook samenwerkt met docenten en didactici van de andere bètavakken. In het bestuur zal Michiel onder andere de contacten met NVON en met zuster verenigingen van de NVvW in de EU onderhouden en bijdragen aan de organisatie van de jaarvergaderingen.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2016

vr/za 5/2 6/2
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vr/za 11/3 12/3
GARDEREN
finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie Freudenthal Instituut

do 17/3
LANDELIJK
W4Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

wo 23/3
LANDELIJK
Grote Rekendag 2016
Organisatie Freudenthal Instituut

vr 8/4
AMSTERDAM
Congres: Leve de wiskunde!
Organisatie Universiteit van Amsterdam

wo 20/4
TILBURG
Fontys Wiskunde Event
Organisatie Fontys Lerarenopleiding Tilburg

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 91

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	22 maart 2016	11 januari 2016
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016